Fonctions de parking

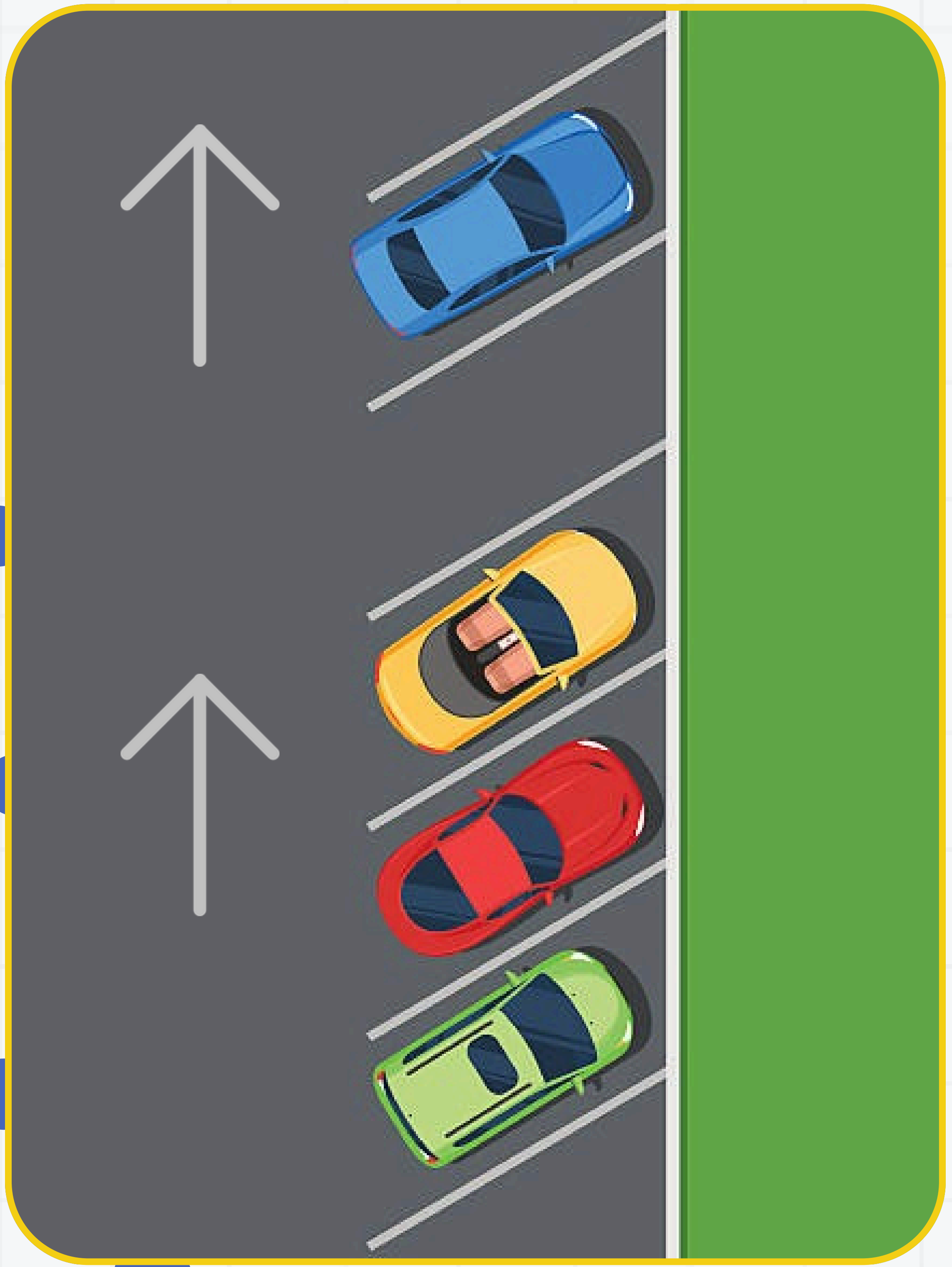
π-Day, lycée Louis-le-Grand

Mars 2026

D'une situation concrète à 50 ans de recherche mathématique

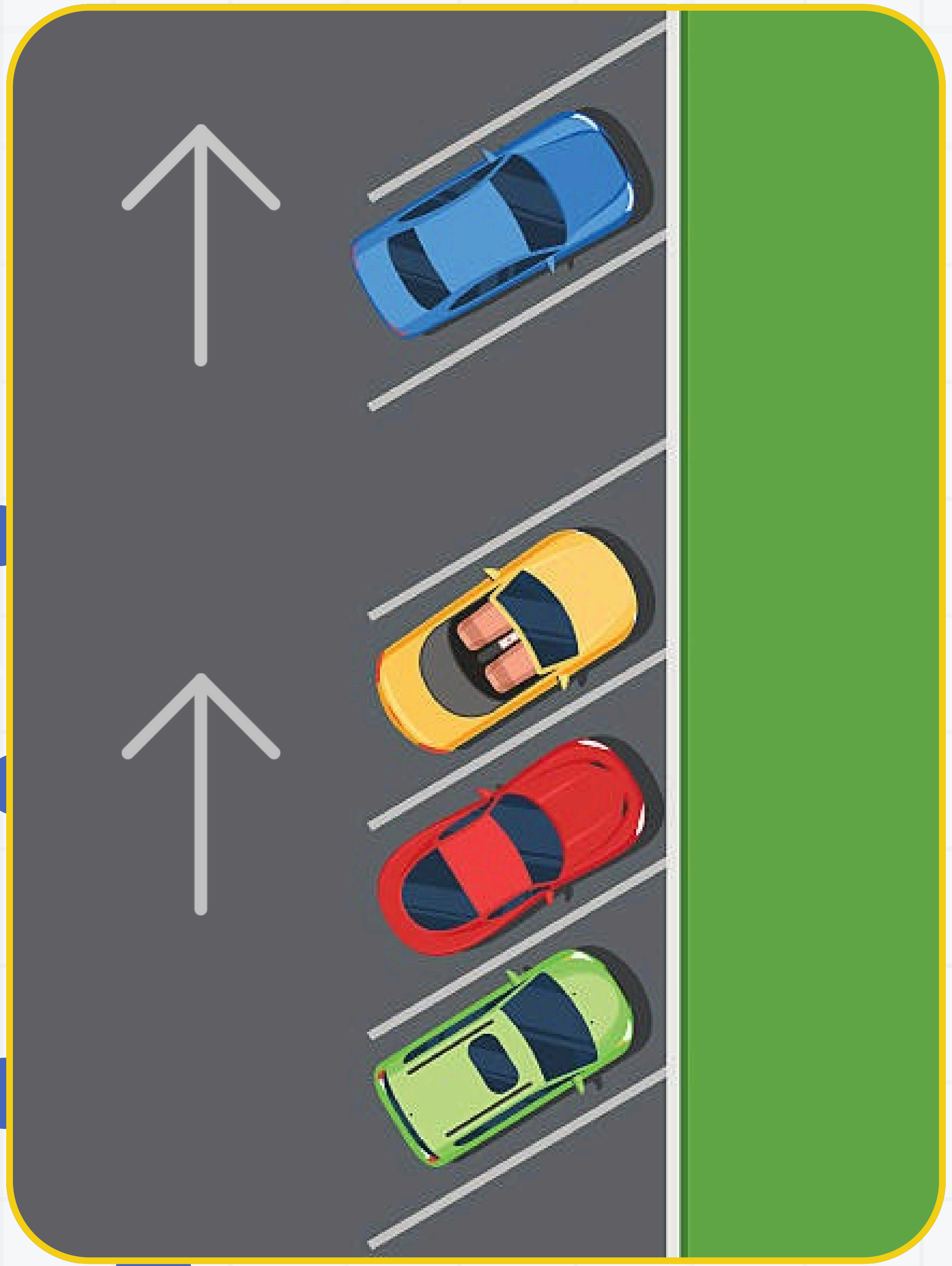
Maena Quemener
Doctorante Sorbonne Université

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
JUSSIEU - PARIS RIVE GAUCHE



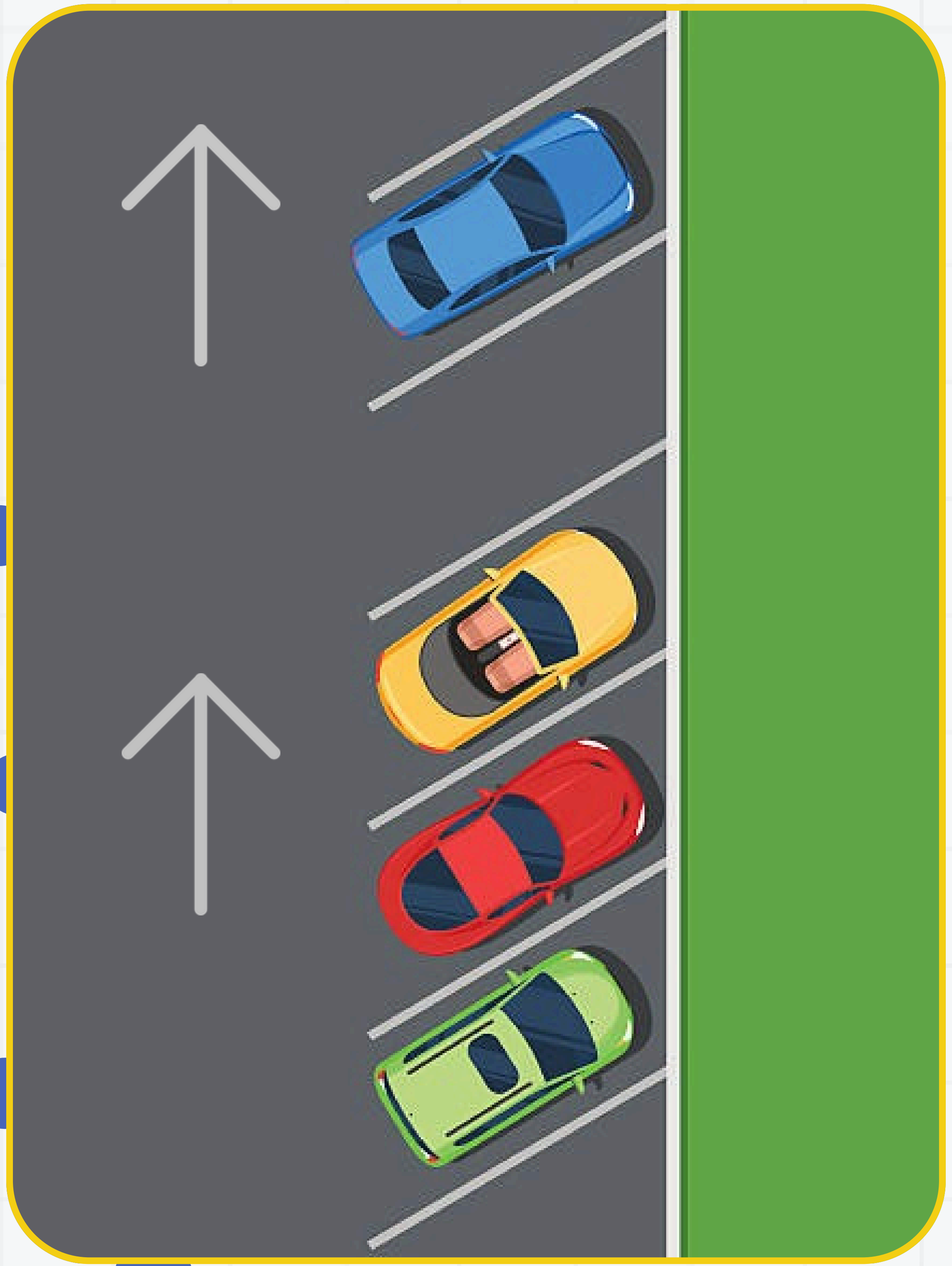
Contexte

- Une rue avec n places de parking alignées.



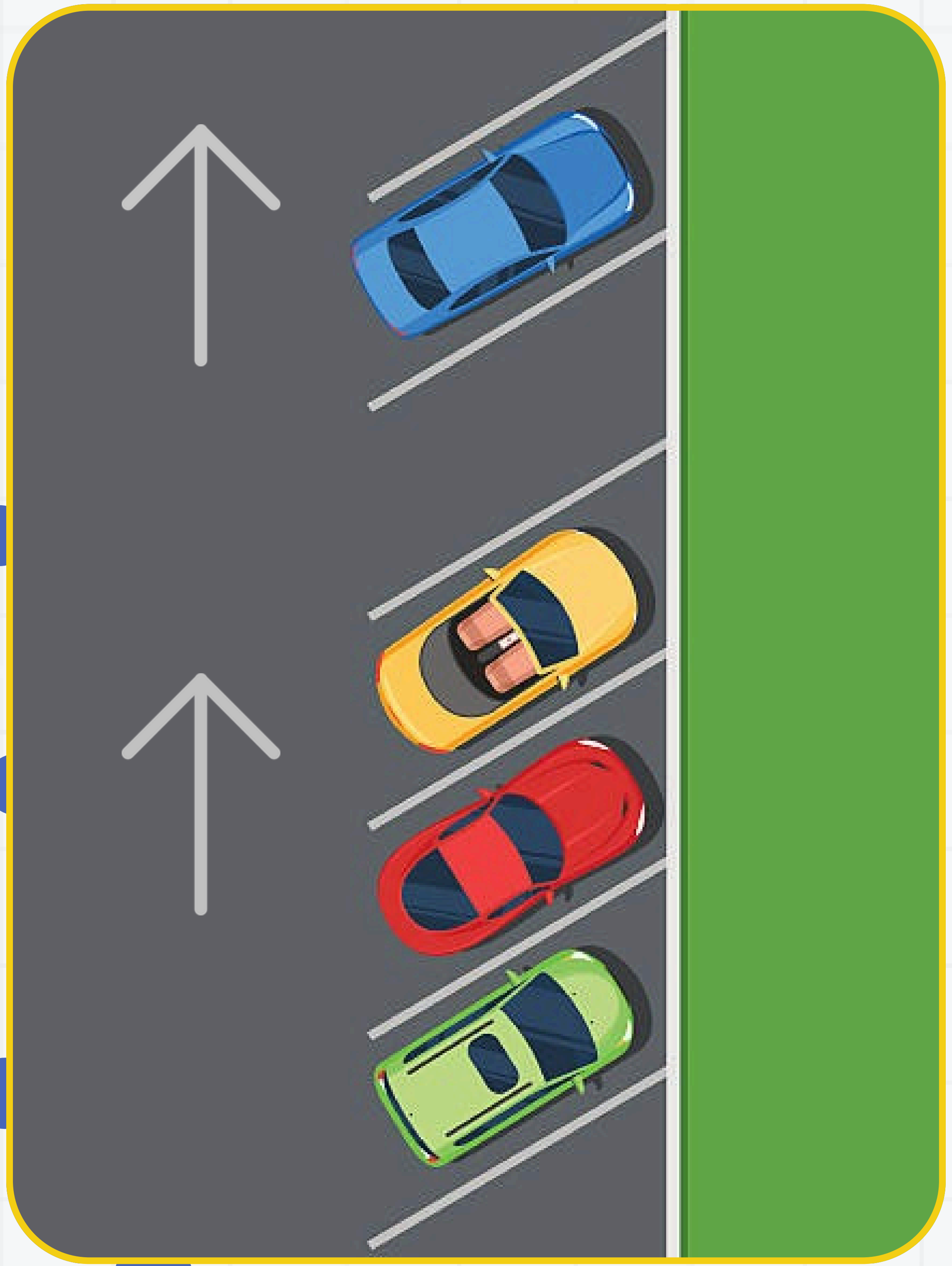
Contexte

- Une rue avec n places de parking alignées.
- n voitures arrivent une par une, chacune avec une place préférée.



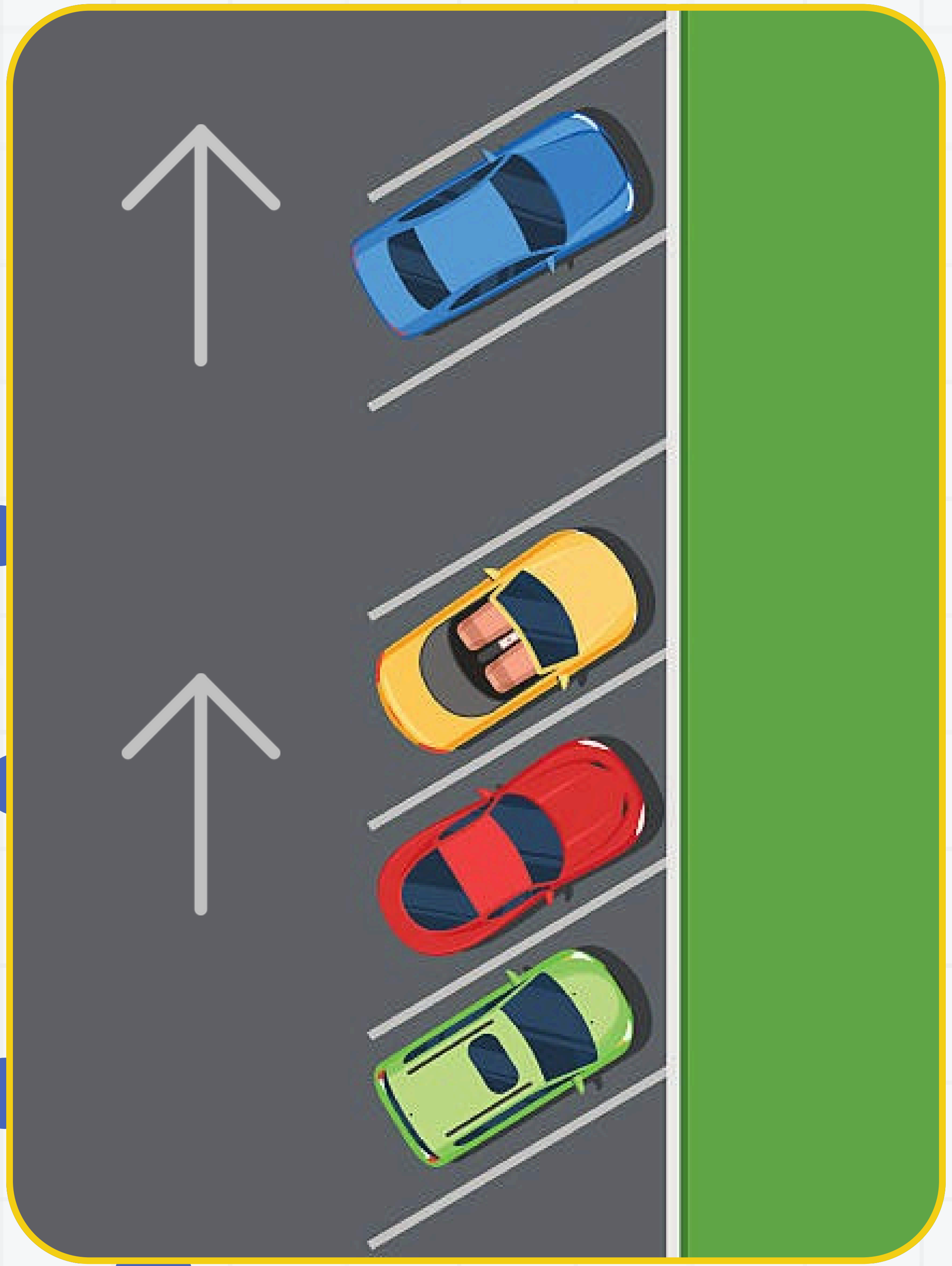
Contexte

- Une rue avec n places de parking alignées.
- n voitures arrivent une par une, chacune avec une place préférée.
- Si la place est libre → la voiture s'y gare.



Contexte

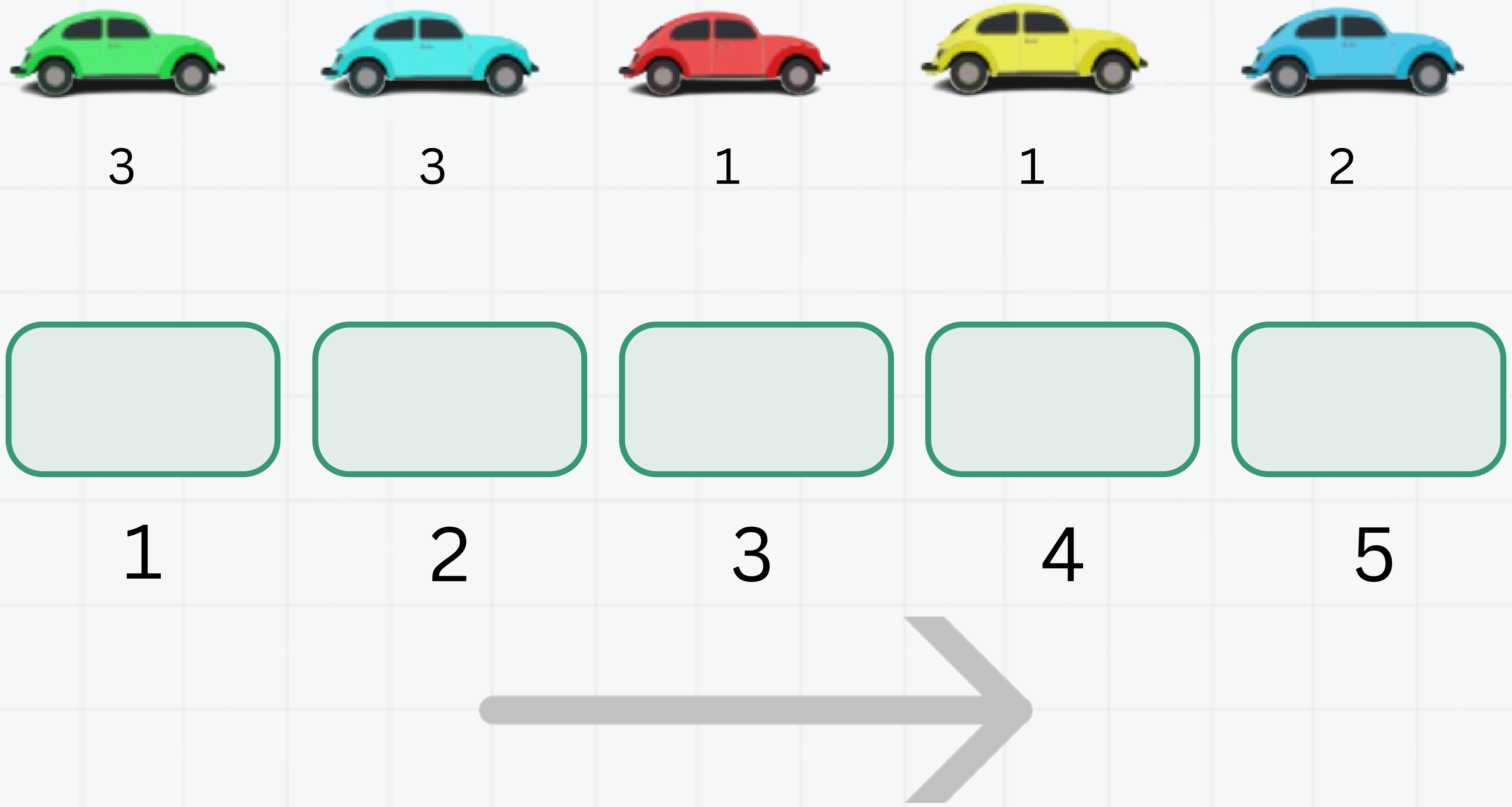
- Une rue avec n places de parking alignées.
- n voitures arrivent une par une, chacune avec une place préférée.
- Si la place est libre → la voiture s'y gare.
- Sinon → elle avance jusqu'à la première place libre.



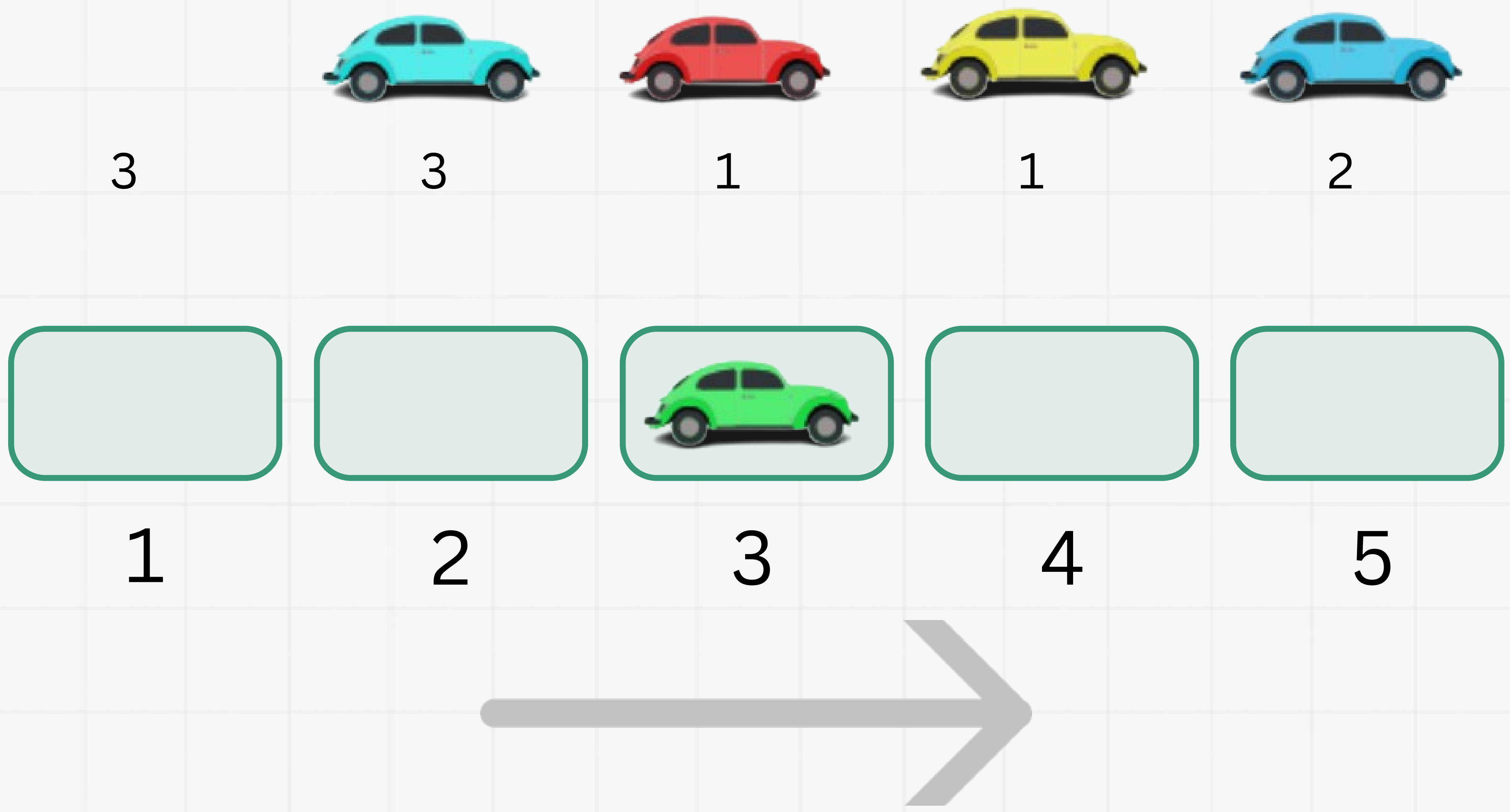
Contexte

- Une rue avec n places de parking alignées.
- n voitures arrivent une par une, chacune avec une place préférée.
- Si la place est libre → la voiture s'y gare.
- Sinon → elle avance jusqu'à la première place libre.
- Si toutes les voitures réussissent à se garer, la liste des préférences est appelée fonction de parking.

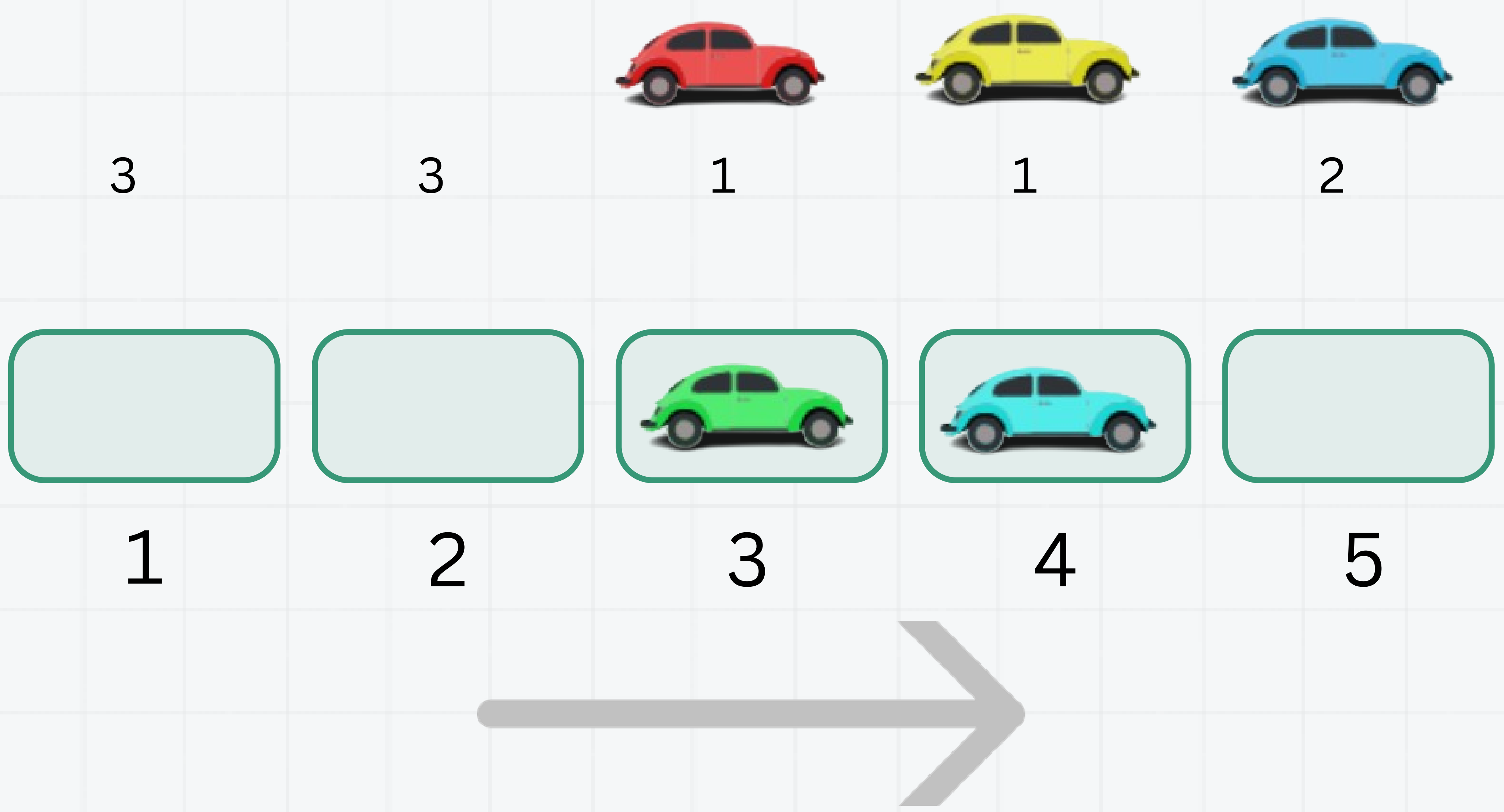
Exemples



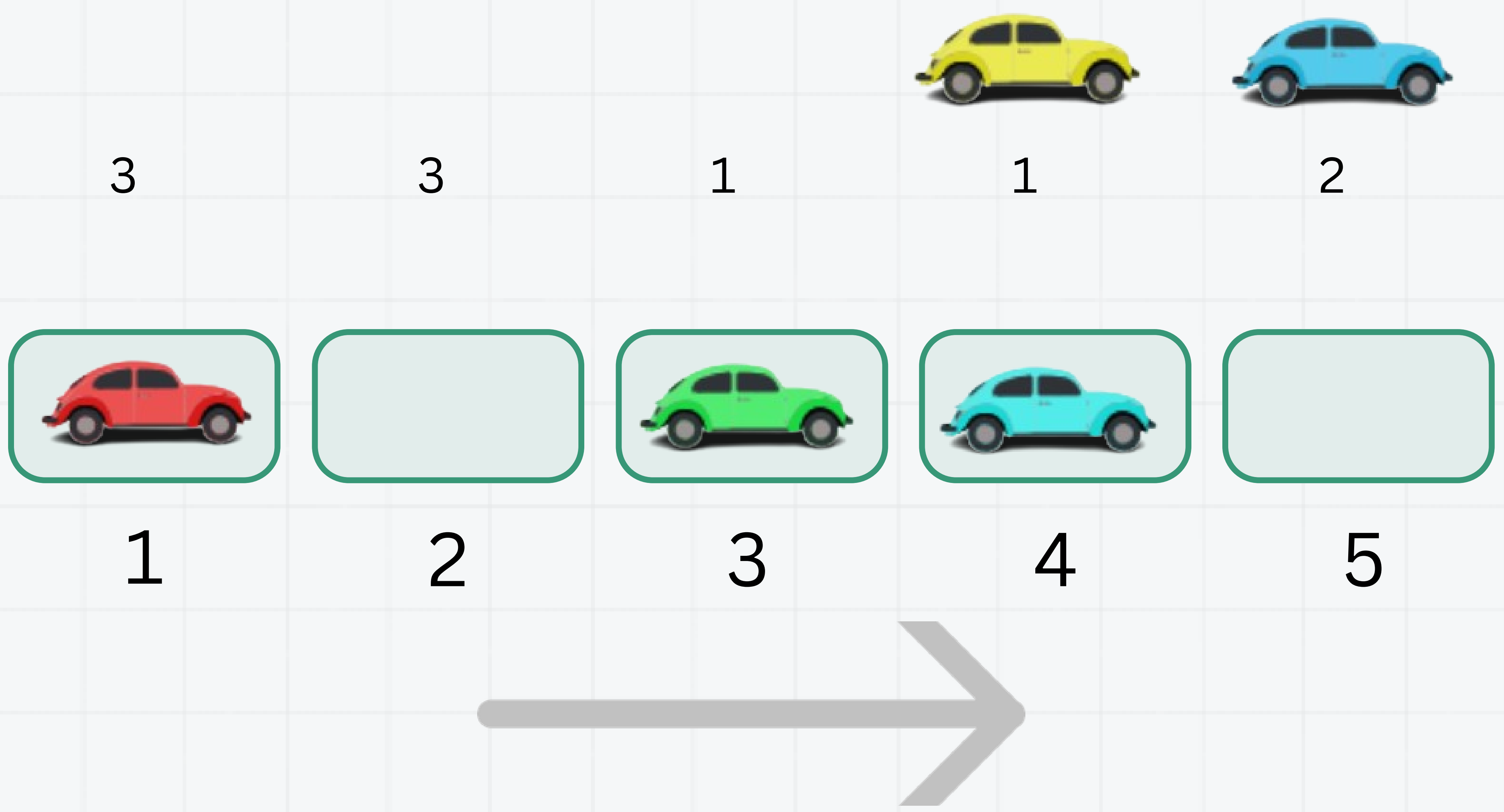
Exemples



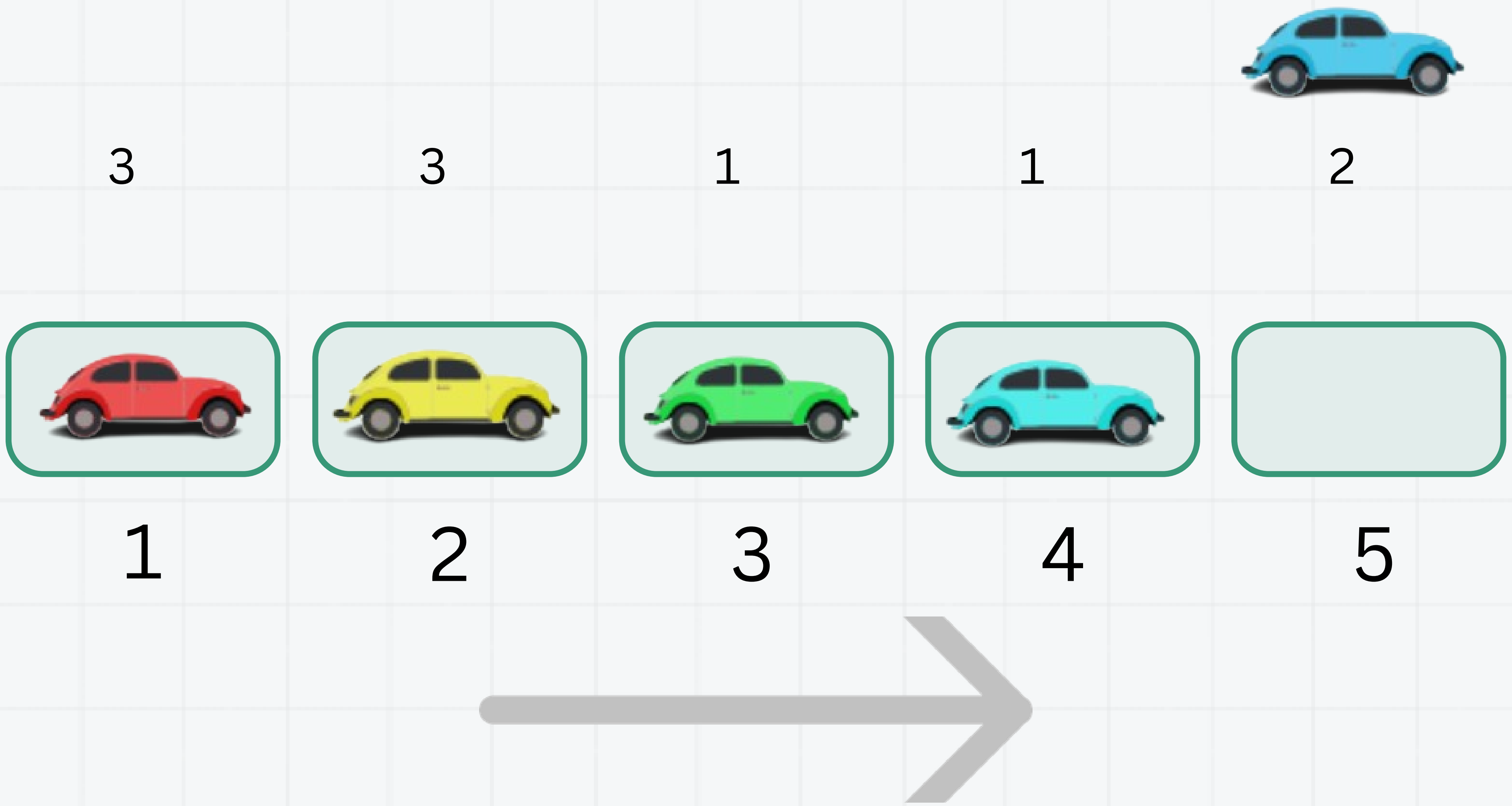
Exemples



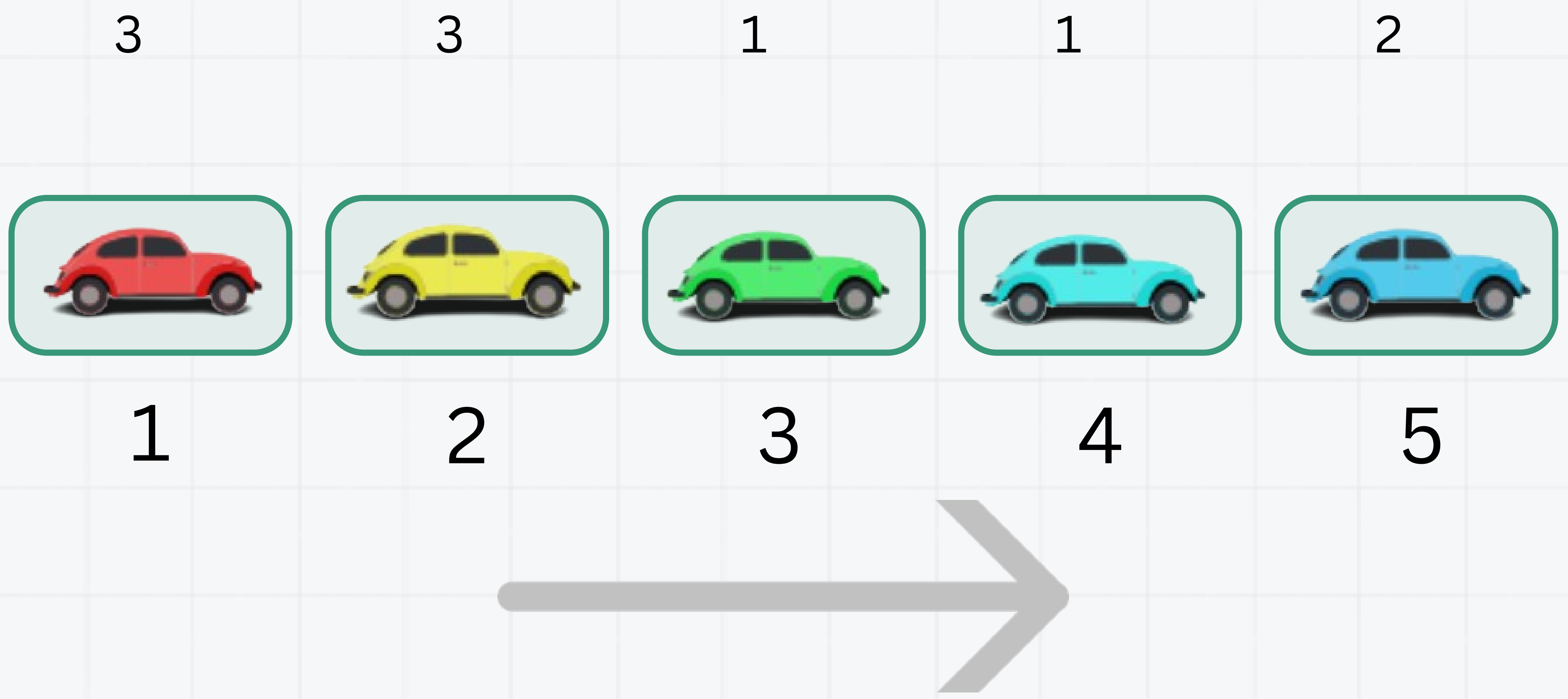
Exemples



Exemples



Exemples



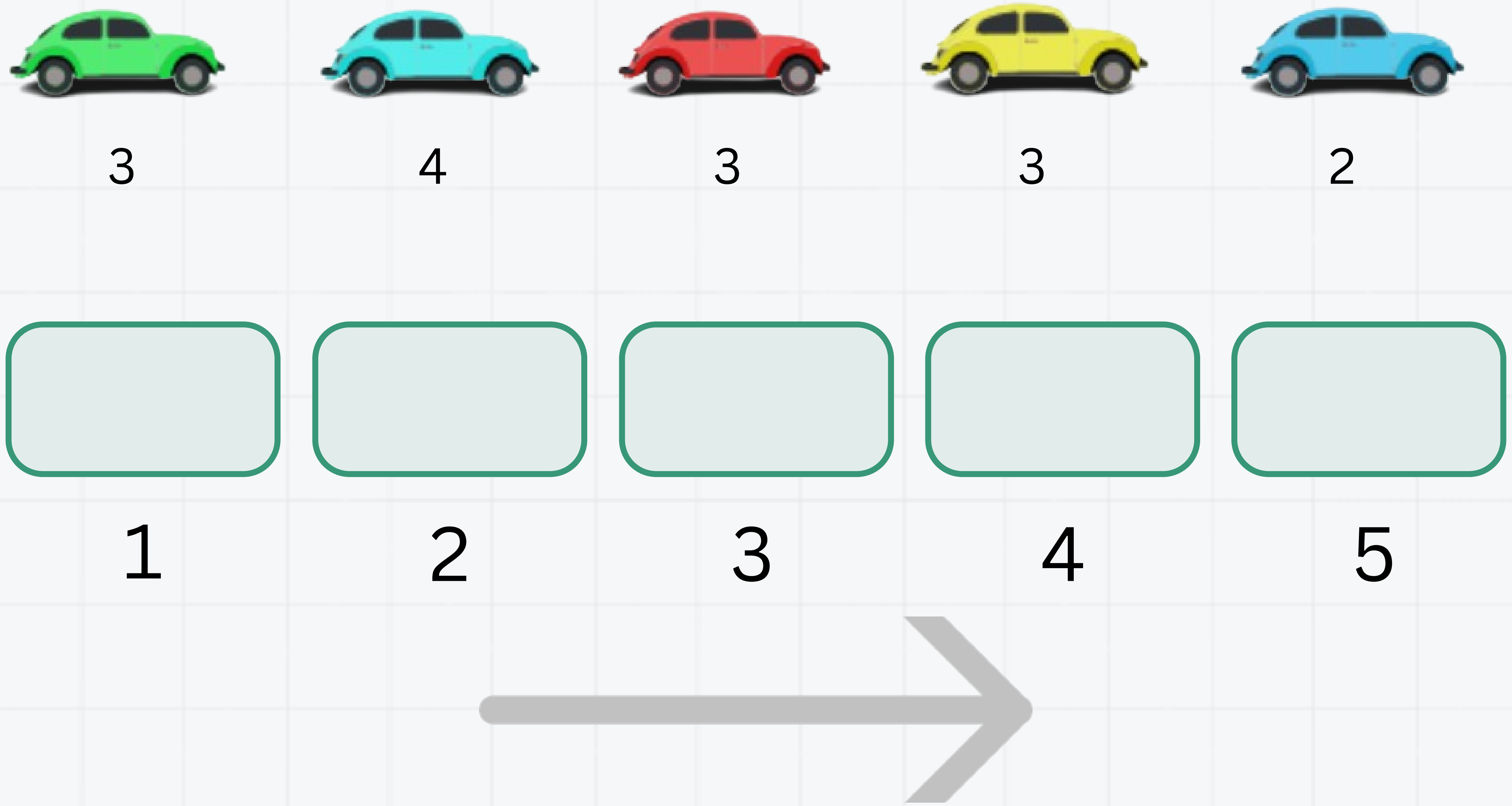
Exemples

La séquence

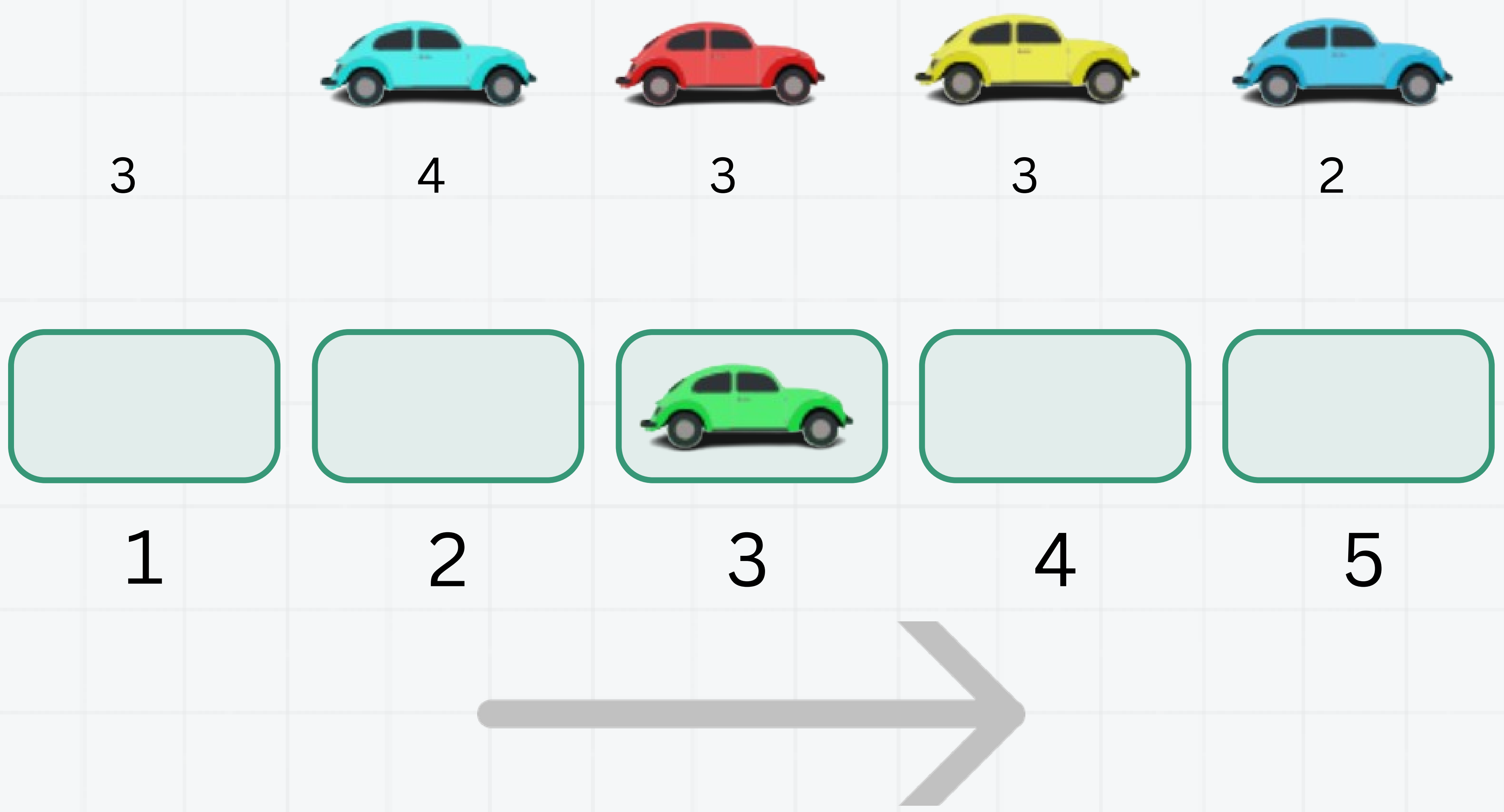
3 3 1 1 2

est une **fonction de parking**.

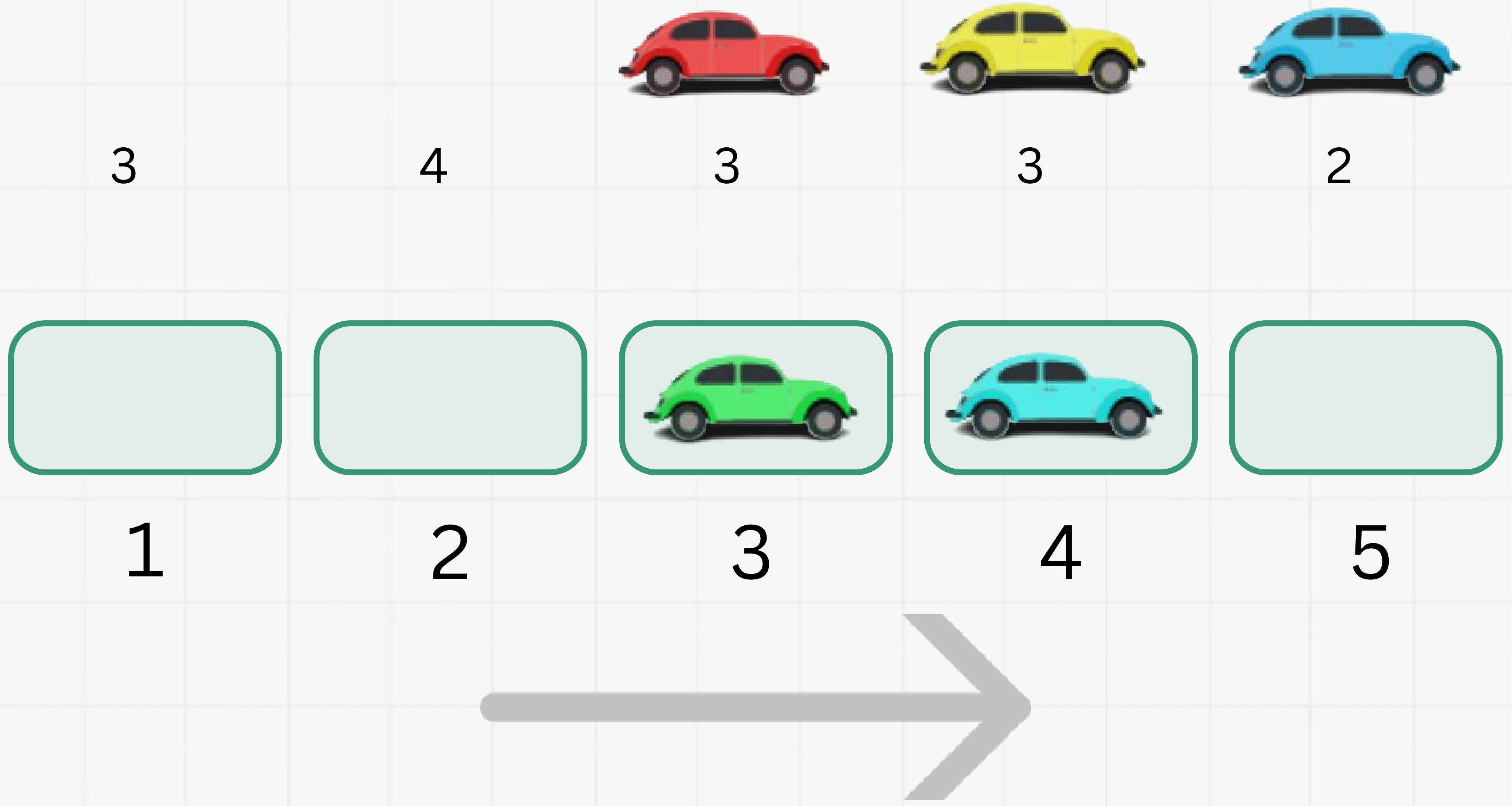
Exemples



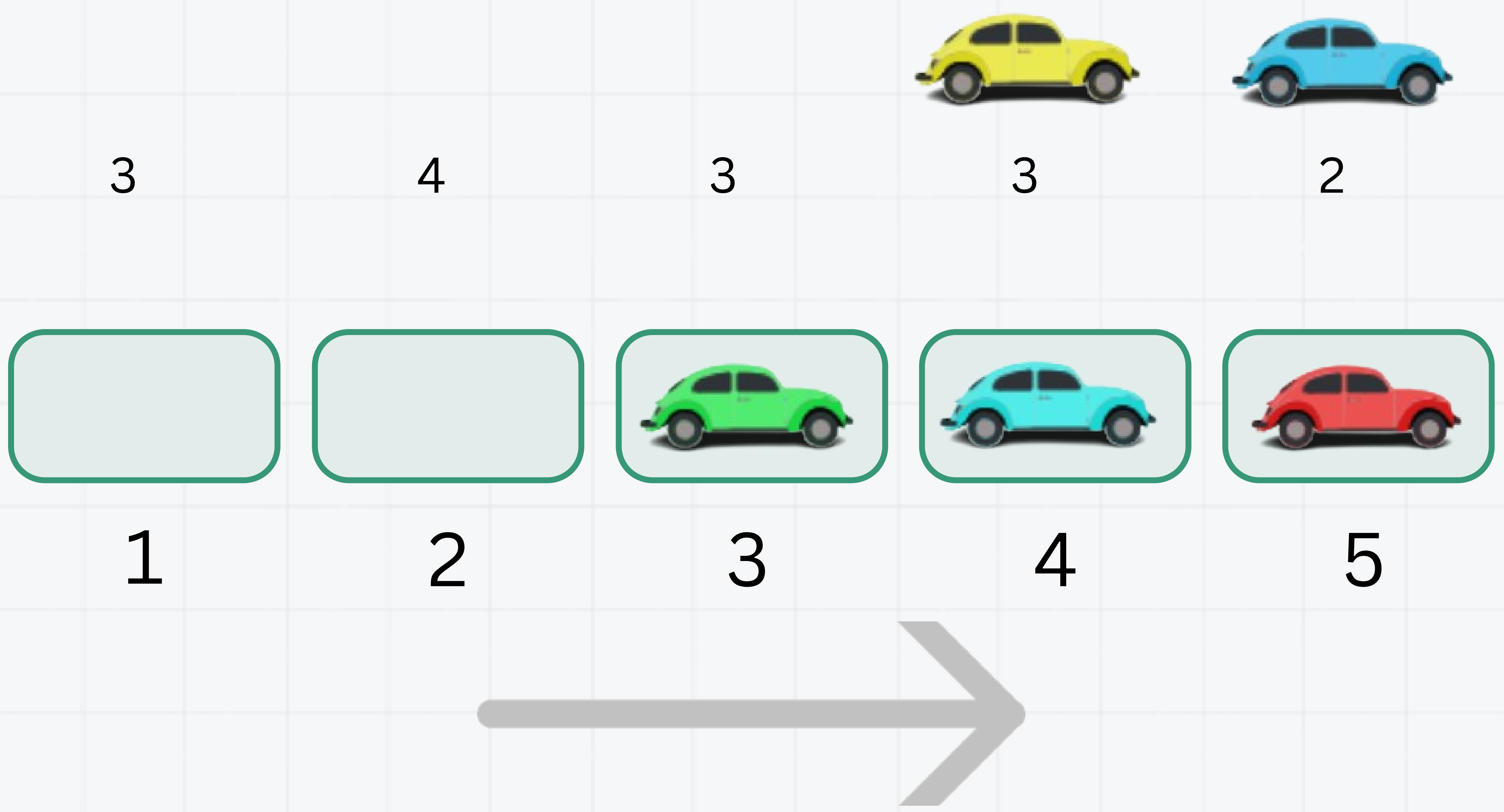
Exemples



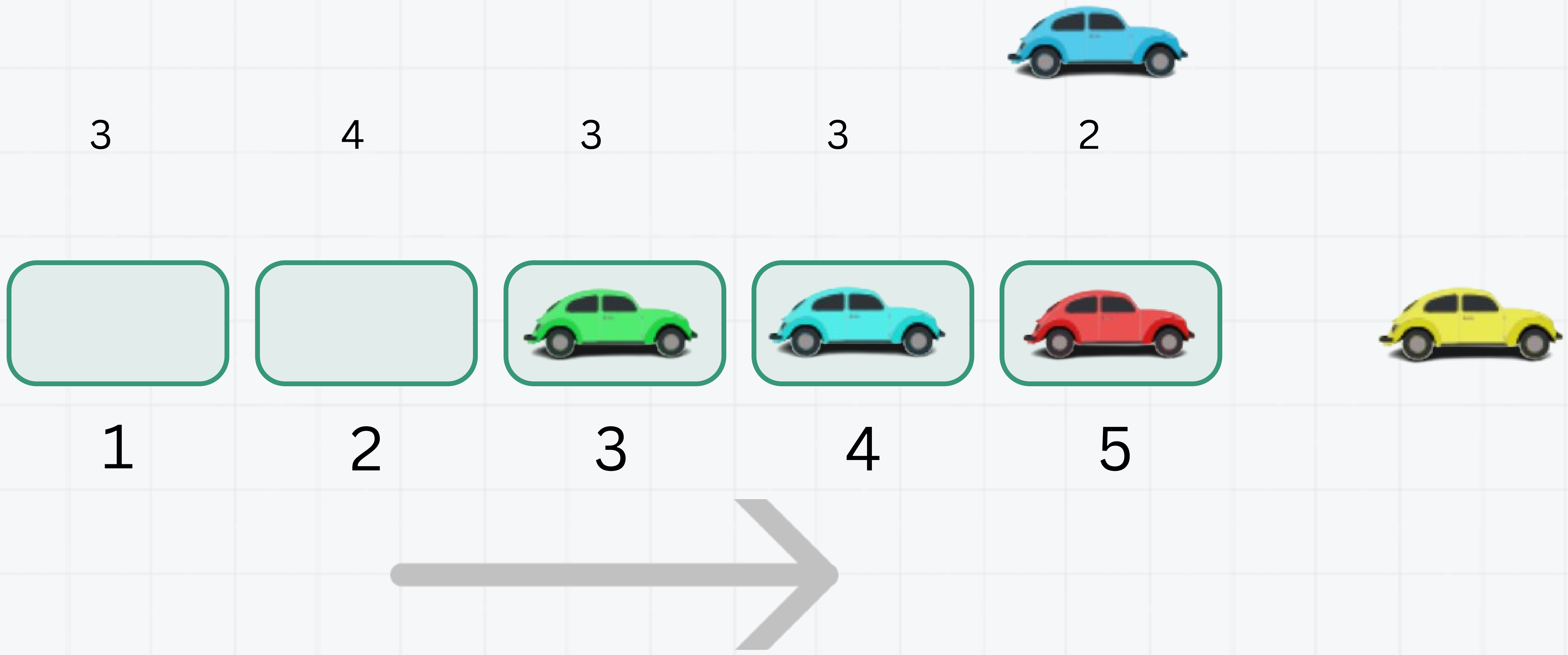
Exemples



Exemples



Exemples



Exemples

La séquence

3 4 3 3 2

n’est **pas** une fonction de parking.

Plus d'exemples

- Est-ce que (1,1,…,1) est une fonction de parking?

Plus d'exemples

- Est-ce que (1,1,...,1) est une fonction de parking? **OUI**

Plus d'exemples

- Est-ce que (1,1,...,1) est une fonction de parking? **OUI**

- S'il y a n places, combien de n au plus peut-il y avoir dans la liste de préférences?

Plus d'exemples

- Est-ce que (1,1,...,1) est une fonction de parking? **OUI**

- S'il y a n places, combien de n au plus peut-il y avoir dans la liste de préférences?

  Un seul, car sinon la deuxième voiture qui veut aller à la place n sortirait de la rue.

Plus d'exemples

- Combien de fonctions de parking telles que chaque voiture puisse se garer à sa place préférée?

Plus d'exemples

- Combien de fonctions de parking telles que chaque voiture puisse se garer à sa place préférée?

Solution: $n!$

Exemple: $(1,2,3),(1,3,2)$ $(3,2,1),(3,1,2)$
$(2,1,3),(2,3,1)$

Un premier problème

Pour n places, combien y a-t-il de fonctions de parking?

1. On essaie sur des petits cas.
2. On essaie de poser une définition formelle.

Premiers cas

$n = 1$

$n = 2$

$n = 3$

Premiers cas

$n = 1$

(1)

$n = 2$

$n = 3$

Premiers cas

$n = 1$

(1)

$n = 2$

$(1,1), (1,2), (2,1)$

$n = 3$

Premiers cas

$n = 1$

(1)

$n = 2$

$(1,1),(1,2),(2,1)$

$n = 3$

$(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1)$
$(2,1,1),(1,1,3),(1,3,1)$
$(3,1,1),(1,2,2),(2,1,2)$
$(2,2,1),(1,2,3),(1,3,2)$
$(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2)$
$(3,2,1)$

Premiers cas

$n = 1$

(1)

$s = 1$

$n = 2$

$(1,1), (1,2), (2,1)$

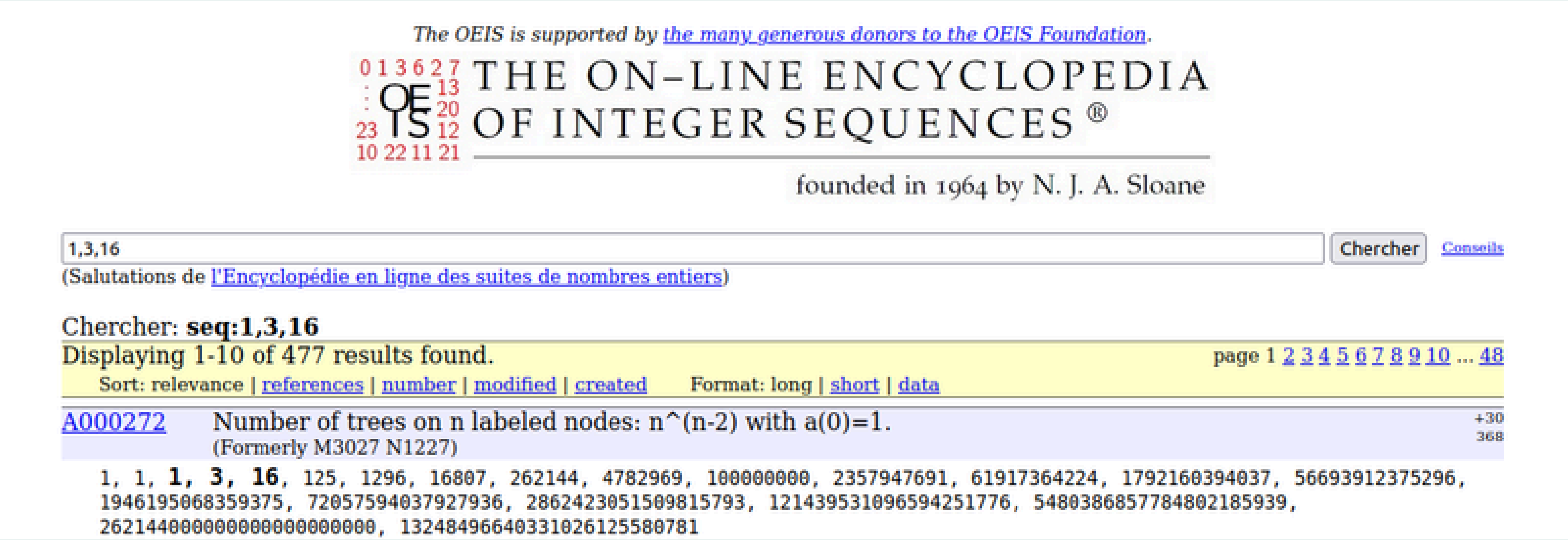
$s = 3$

$n = 3$

$(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1)$
$(2,1,1), (1,1,3), (1,3,1)$
$(3,1,1), (1,2,2), (2,1,2)$
$(2,2,1), (1,2,3), (1,3,2)$
$(2,1,3), (2,3,1), (3,1,2)$
$(3,2,1)$

$s = 16$

Premiers cas



https://oeis.org

Premiers cas

The OEIS is supported by [the many generous donors to the OEIS Foundation](#).

THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES ®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

1,3,16 | Chercher | Conseils

(Salutations de l'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers)

Chercher: **seq:1,3,16**

Displaying 1-10 of 477 results found. page 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ... 48

Sort: relevance | references | number | modified | created Format: long | short | data

A000272 Number of trees on n labeled nodes: n^(n-2) with a(0)=1. +30 368
(Formerly M3027 N1227)

1, 1, **1, 3, 16**, 125, 1296, 16807, 262144, 4782969, 100000000, 2357947691, 61917364224, 1792160394037, 56693912375296, 1946195068359375, 72057594037927936, 2862423051509815793, 121439531096594251776, 5480386857784802185939, 262144000000000000000000, 13248496640331026125580781

Idée: $(n+1)^{n-1}$

https://oeis.org

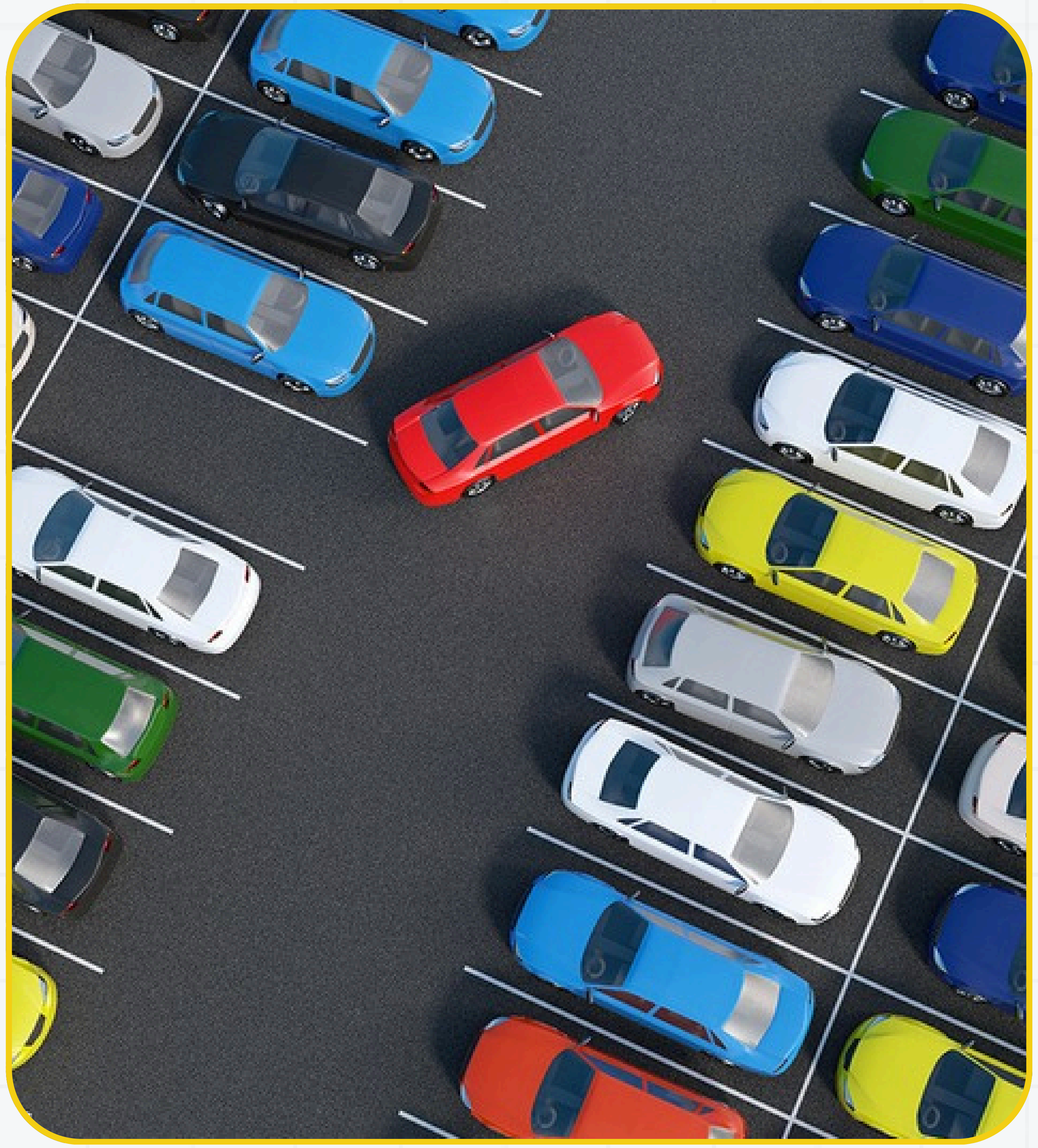
Définition

Soit n un entier et $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une suite d'entiers compris entre 1 et n.

Soit $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ le réarrangement de α dans l'ordre croissant.

La séquence α est une **fonction de parking** ssi

pour tout $i, b_i \leqslant i.$



Théorème

Pyke, 1959, Konheim et Weiss, 1966, Riordan, 1969

Si on note PF_n l'ensemble des fonctions de parking à n voitures, on a:

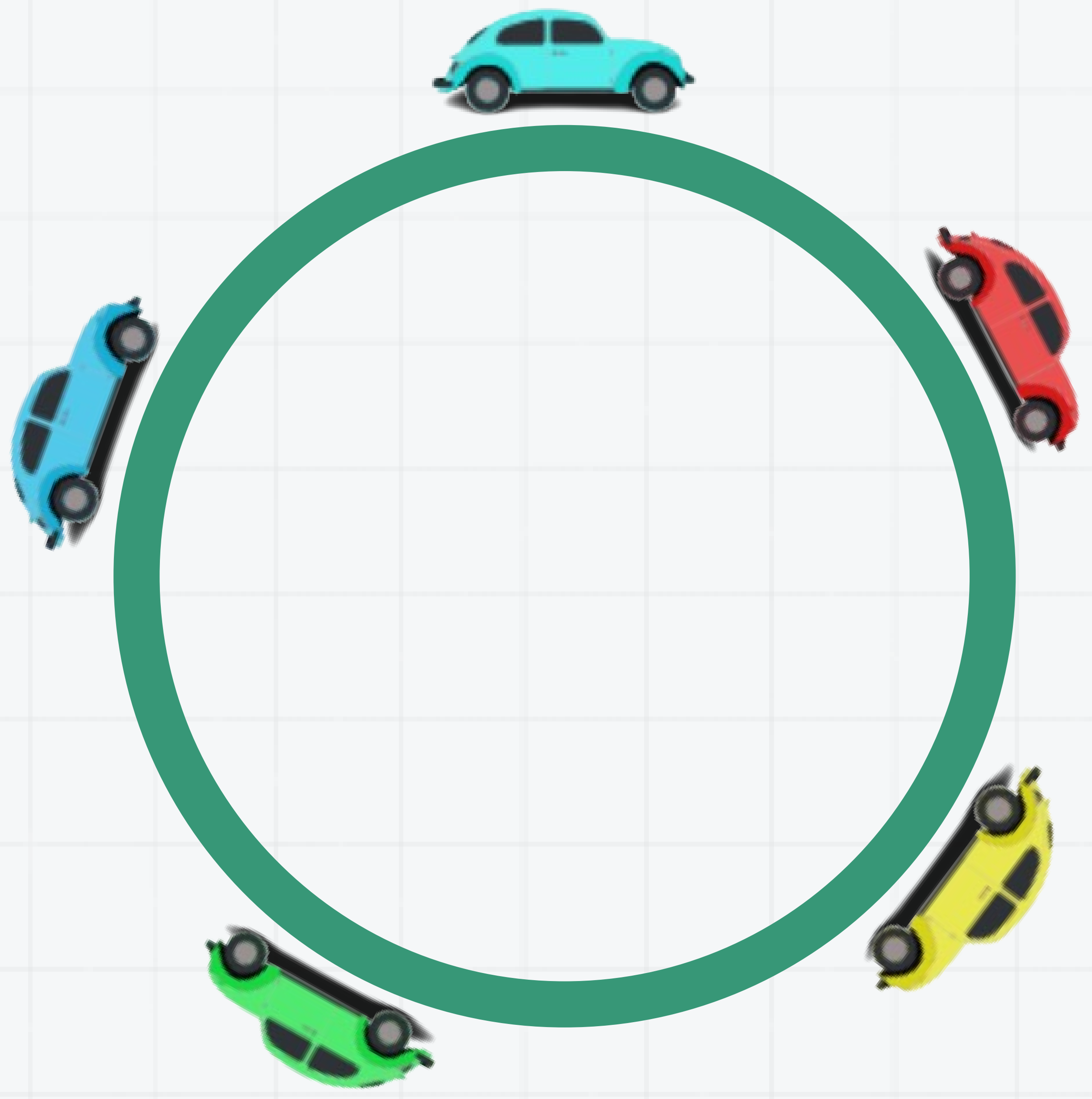
$$|PF_n| = (n+1)^{n-1}$$

Preuve

On suppose maintenant que les n voitures peuvent choisir parmis $n+1$ places de parking. Il y a donc

$$(n+1)^n$$

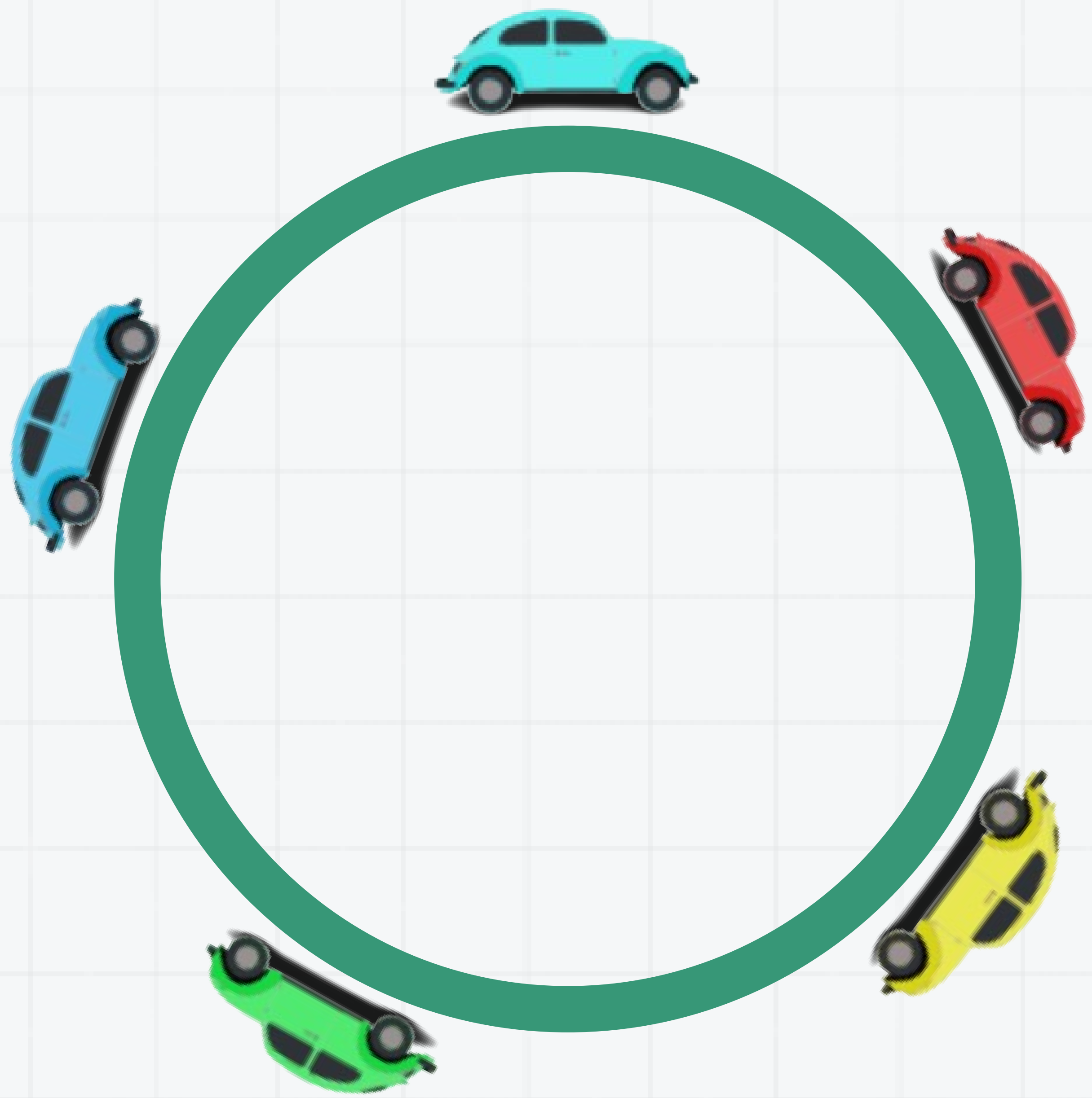
séquences de préférences possibles.



Preuve

$(n+1)^n$ séquences de préférences possibles.

Les voitures tournent autour d'un cercle, donc peuvent revenir au point de départ. **Donc toutes les voitures trouveront une place.**

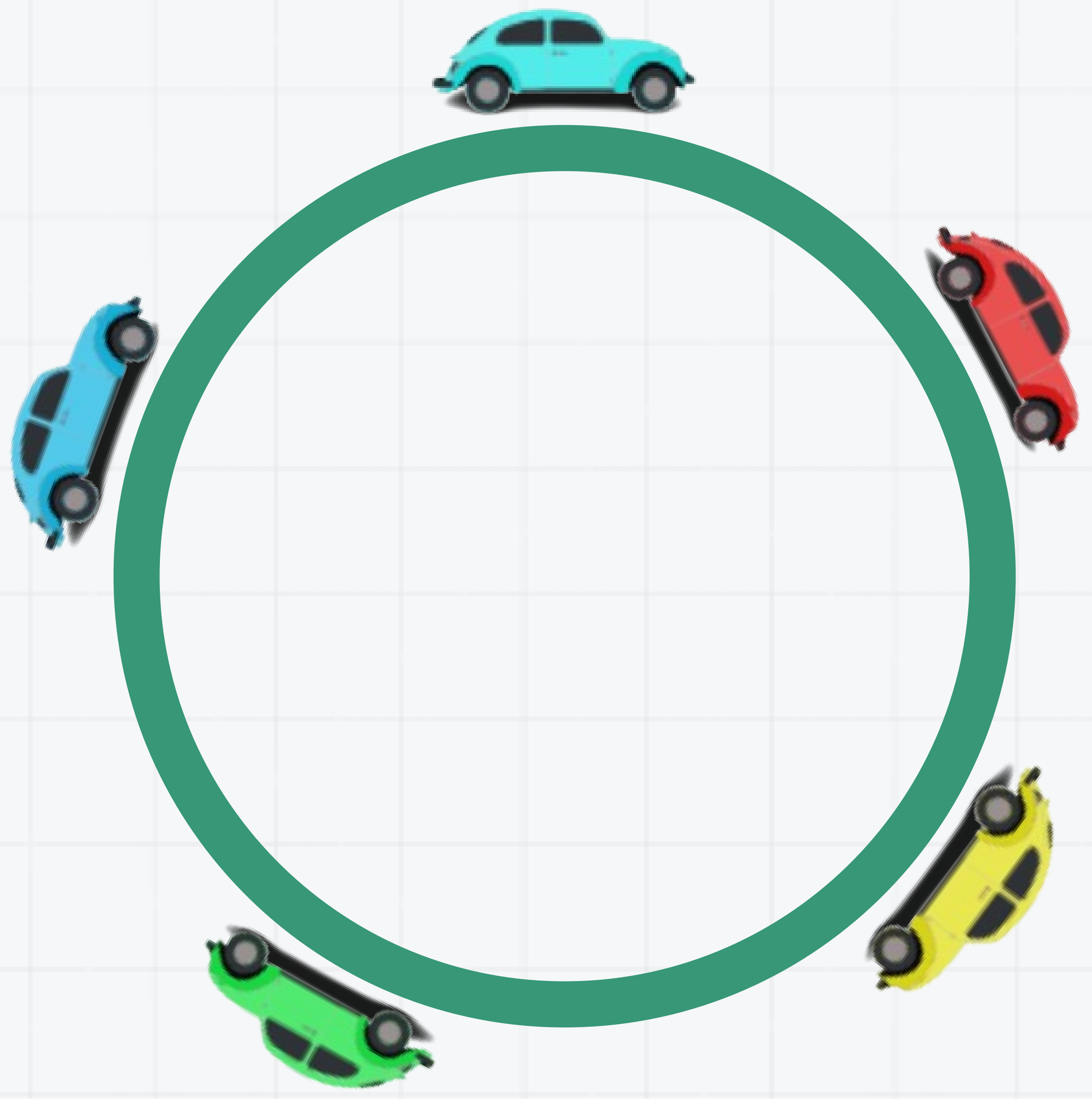


Preuve

$(n+1)^n$ séquences de préférences possibles.

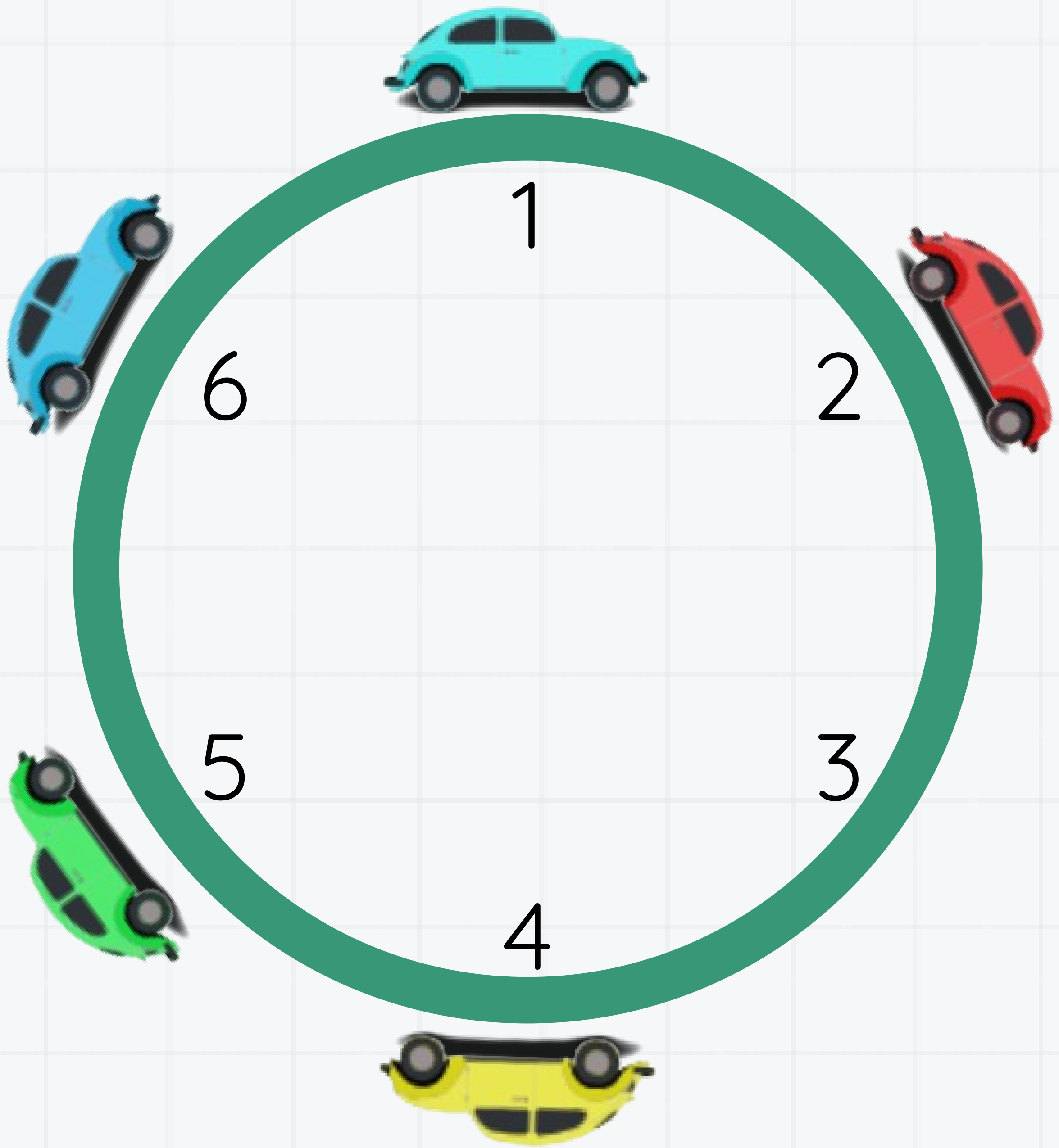
Les voitures tournent autour d'un cercle, donc peuvent revenir au point de départ. **Donc toutes les voitures trouveront une place.**

+ il y aura toujours une place libre.

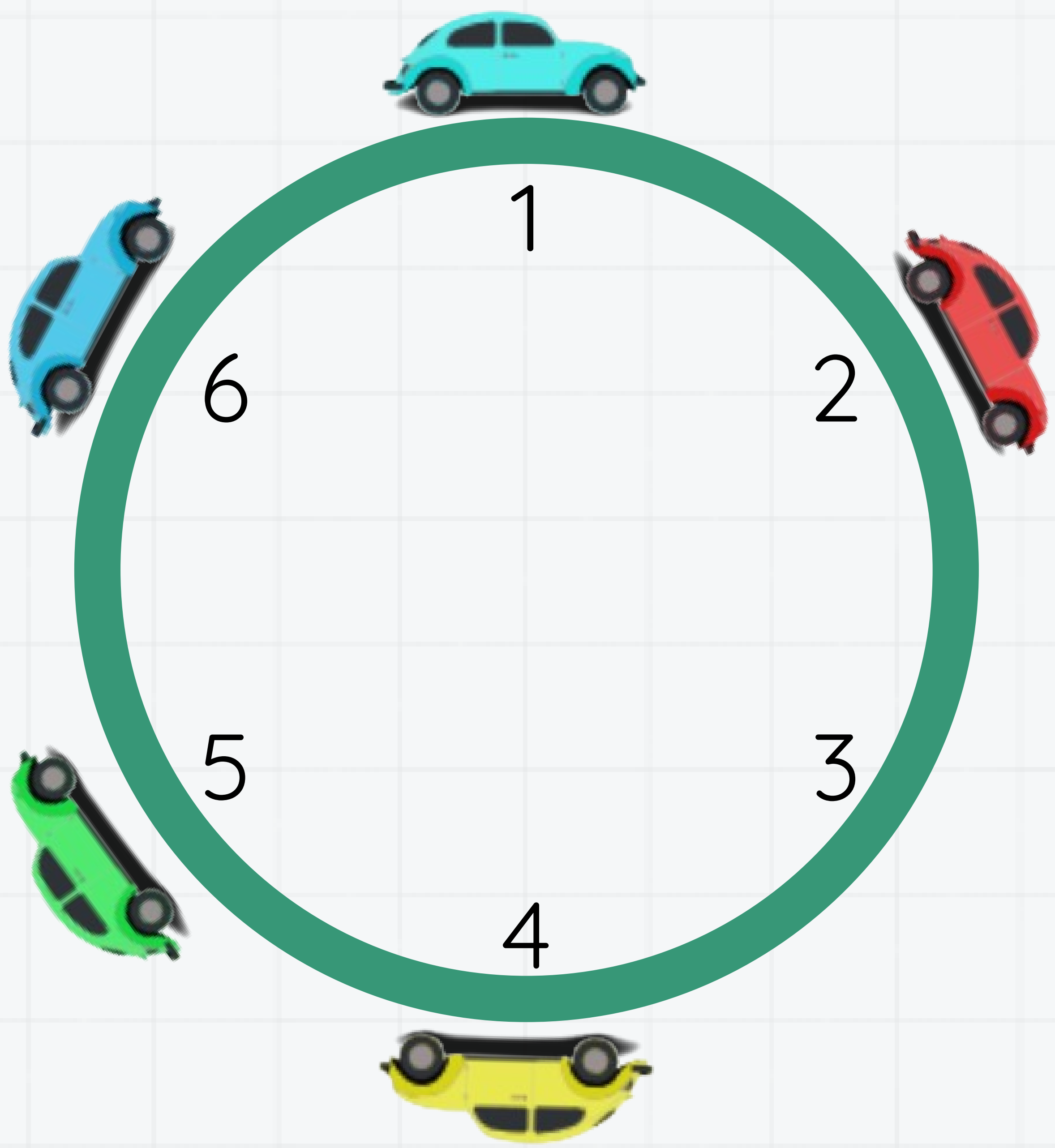


Preuve

1 2 4 4 5

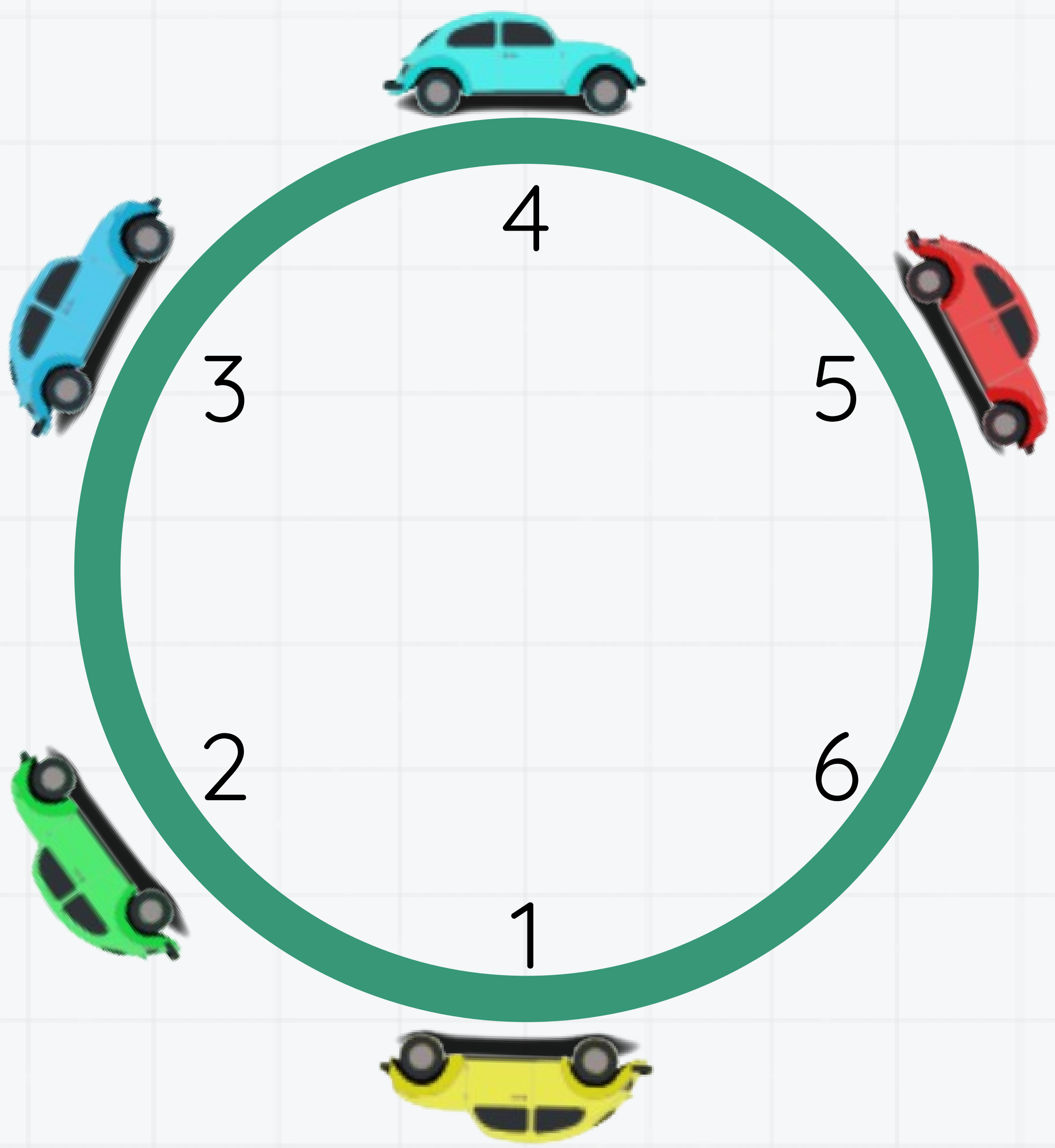


Preuve



La séquence est une fonction de parking ssi la place $n+1$ est libre.

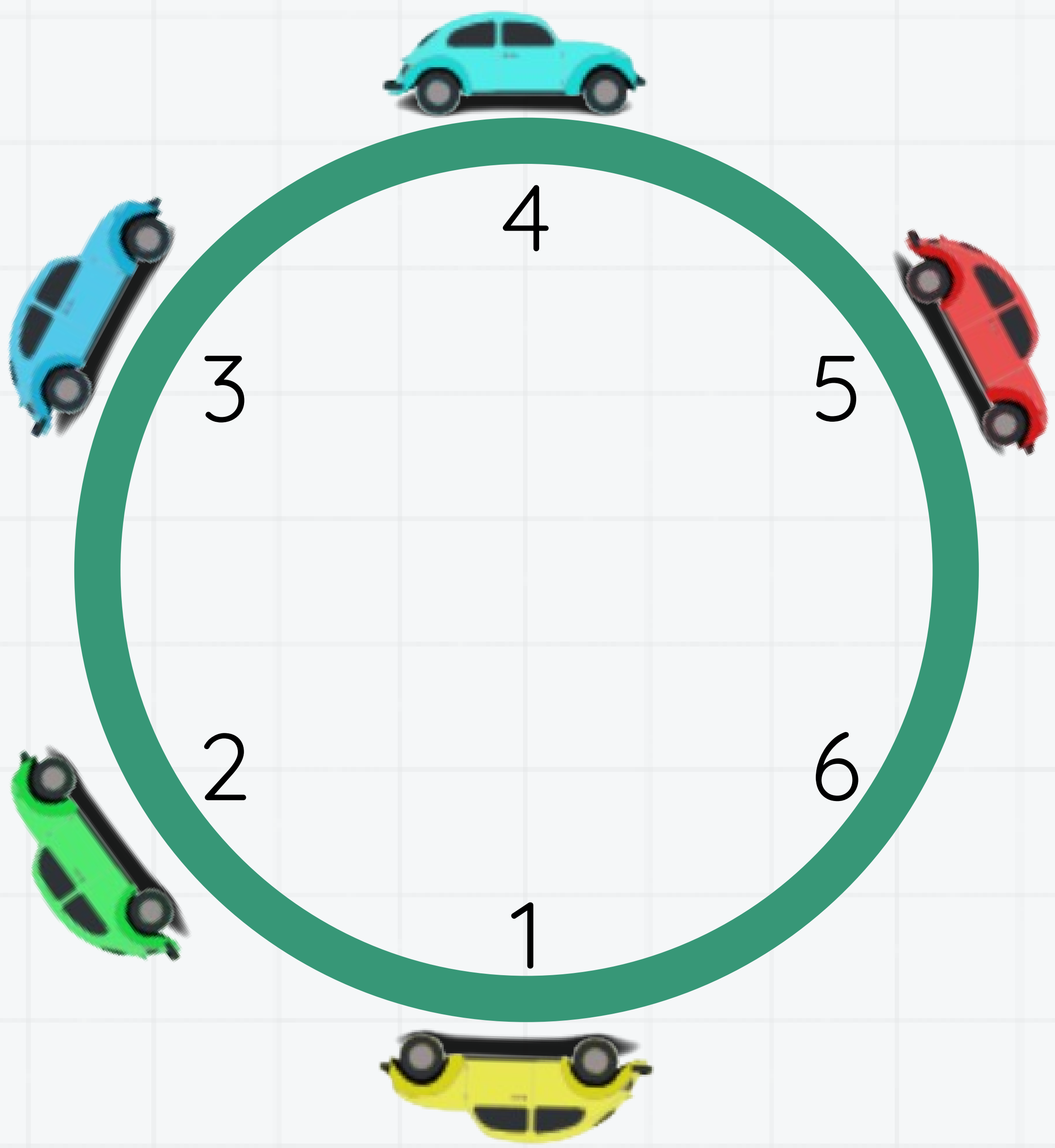
Preuve



La séquence est une fonction de parking ssi la place $n+1$ est libre.

Séquence: 1+3, 2+3, 4+3, 4+3, 5+3 mod 6.
C.a.d: 4 5 1 1 2

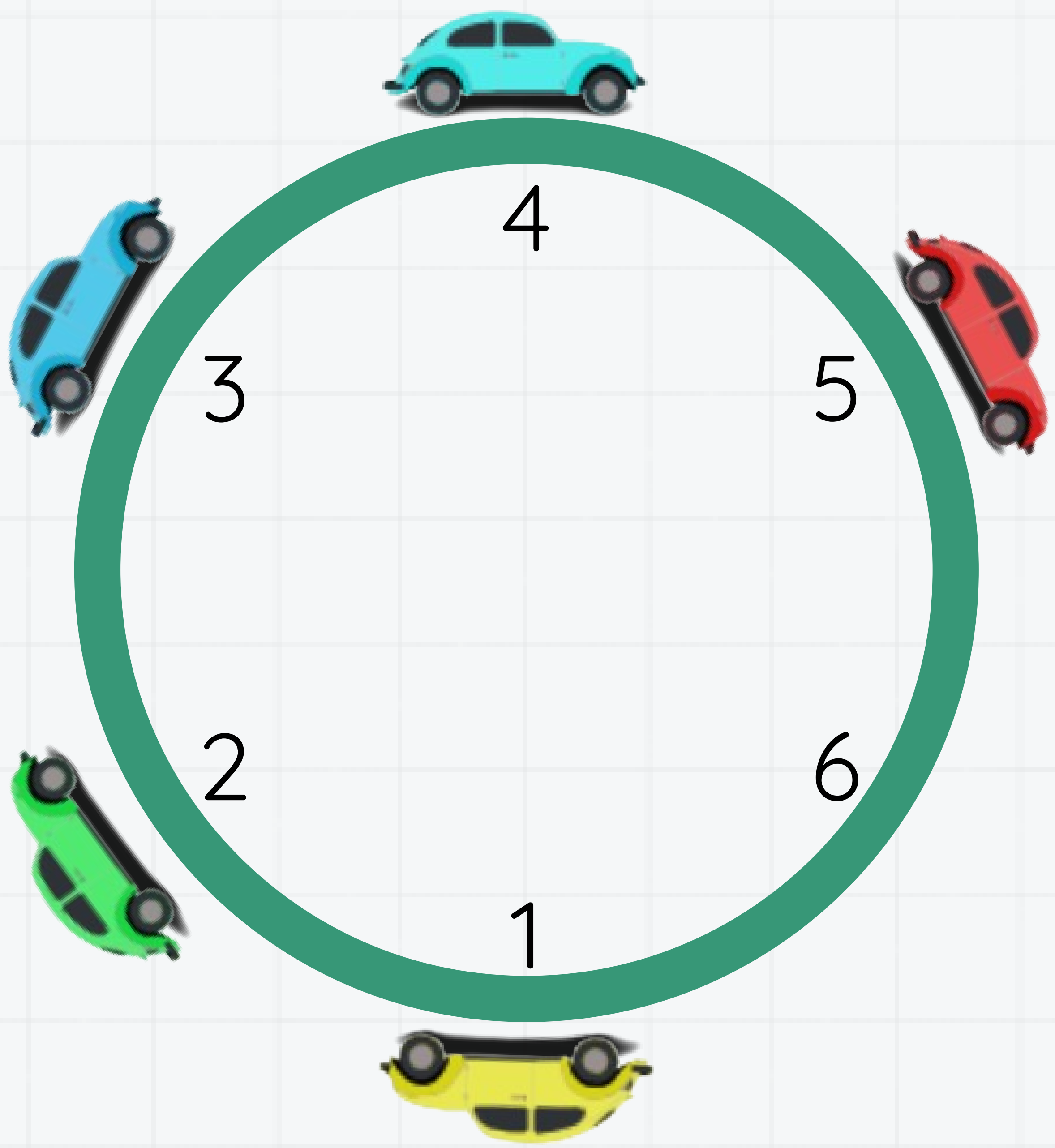
Preuve



$n+1$ rotations possibles, mais une unique forme une fonction de parking.

On peut grouper les séquences de préférences quand elles sont égales à rotation près: paquets de $n+1$ séquences.

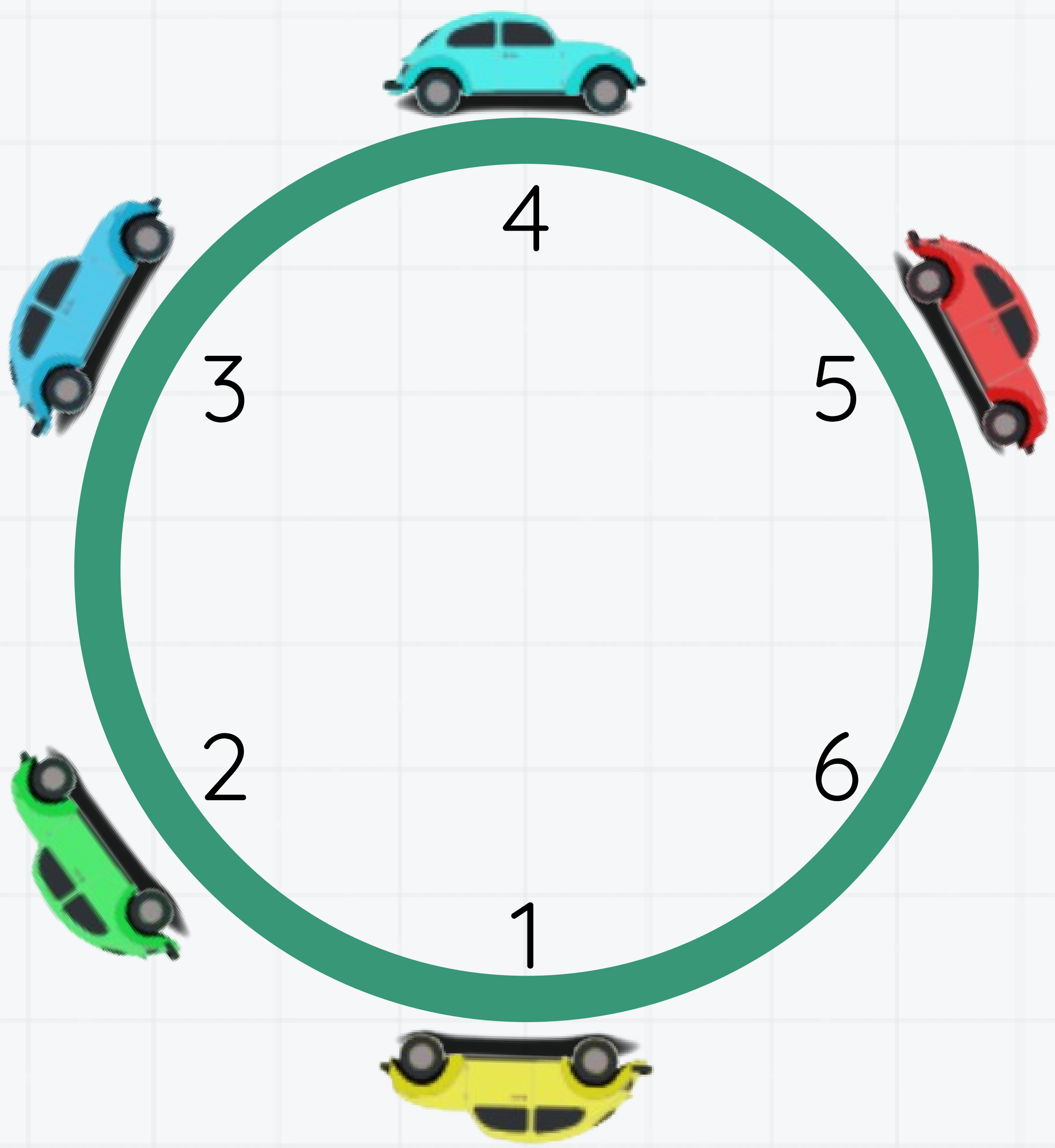
Preuve



On peut grouper les séquences de préférences quand elles sont égales à rotation près: paquets de $n + 1$ séquences.

Par paquet, il n'y en a que un qui forme une fonction de parking.

Preuve



On obtient:

$$\frac{(n+1)^n}{n+1} = (n+1)^{n-1}$$

fonctions de parking possibles.

Connexions

Théorème (Cayley' formula):

Le nombre d'arbres enracinées à $n+1$ sommets est égal à:

$$(n+1)^{n-1}$$

Connexions

Théorème (Cayley' formula):

Le nombre d'arbres enracinées à $n+1$ sommets est égal à:

$$(n+1)^{n-1}$$

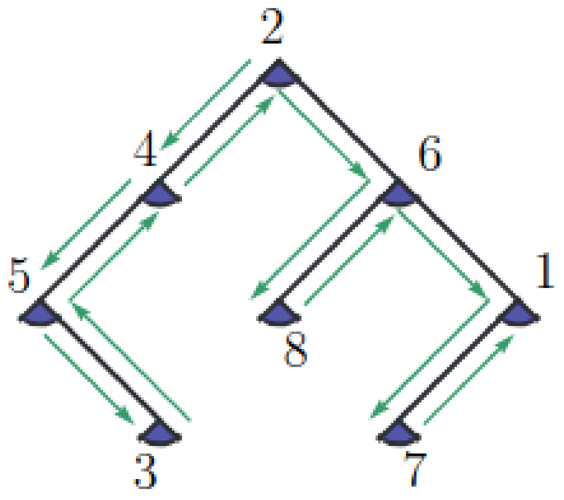
Théorème (Kreweras, 1972):

Le nombre de chaînes maximales d'une partition non-croisée $\{1, \ldots, n+1\}$ est égal à:

$$(n+1)^{n-1}$$

Bijection

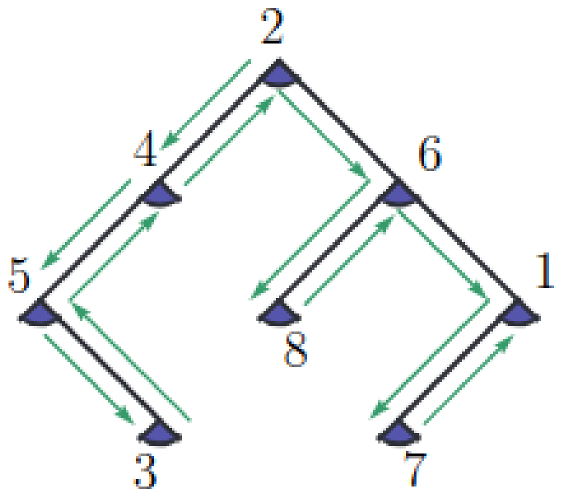
Etape 1:



$$(245 * 3 * * * 68 * * 17 * *)$$

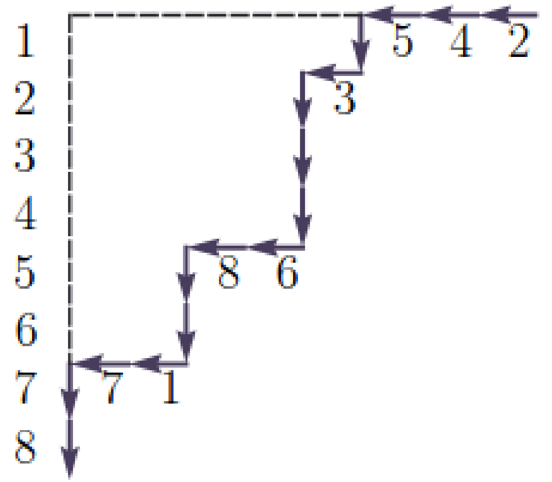
Bijection

Etape 1:



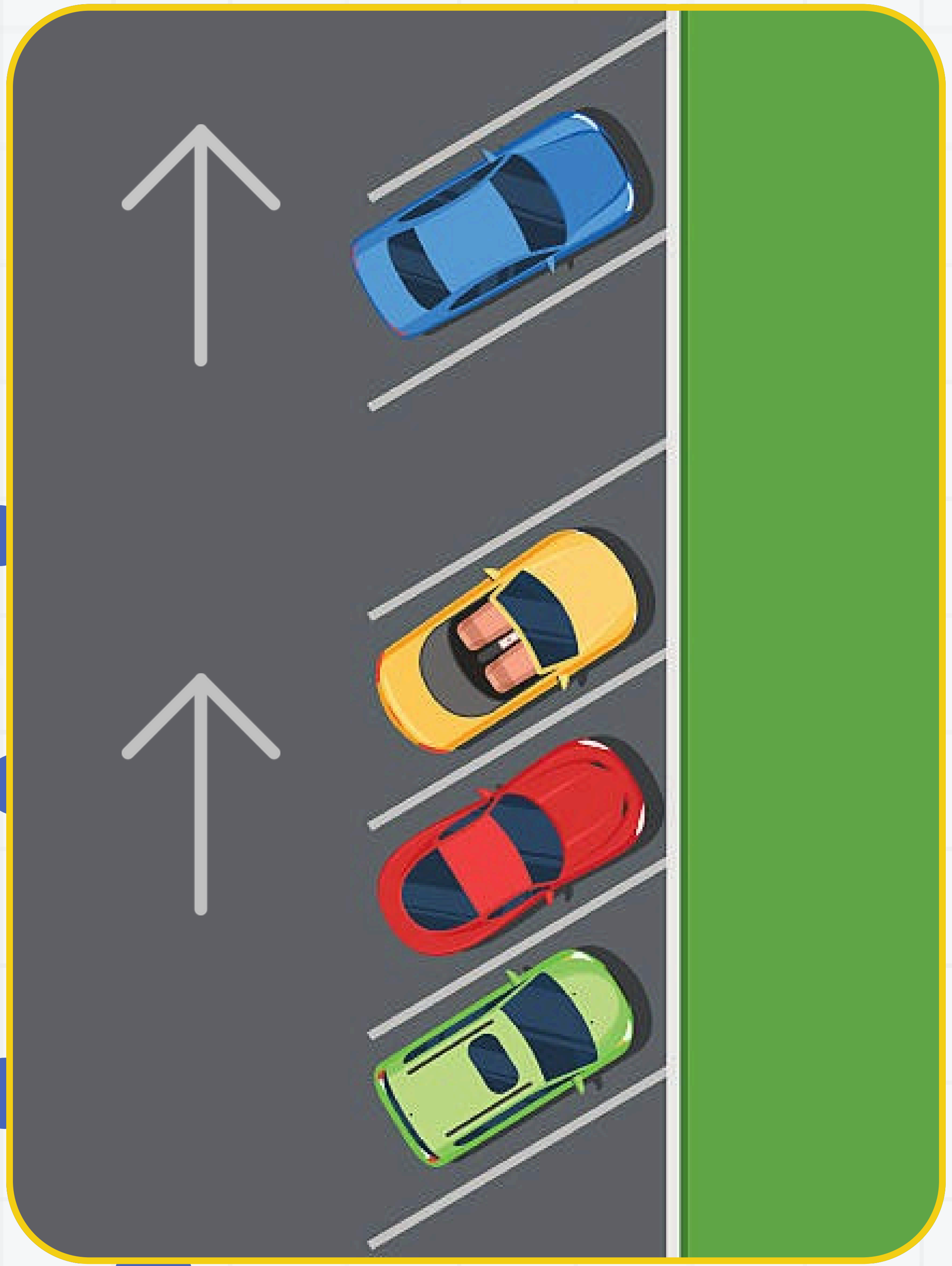
$$(245*3***68**17**)$$

Etape 2:



$$(245*3***68**17**)$$

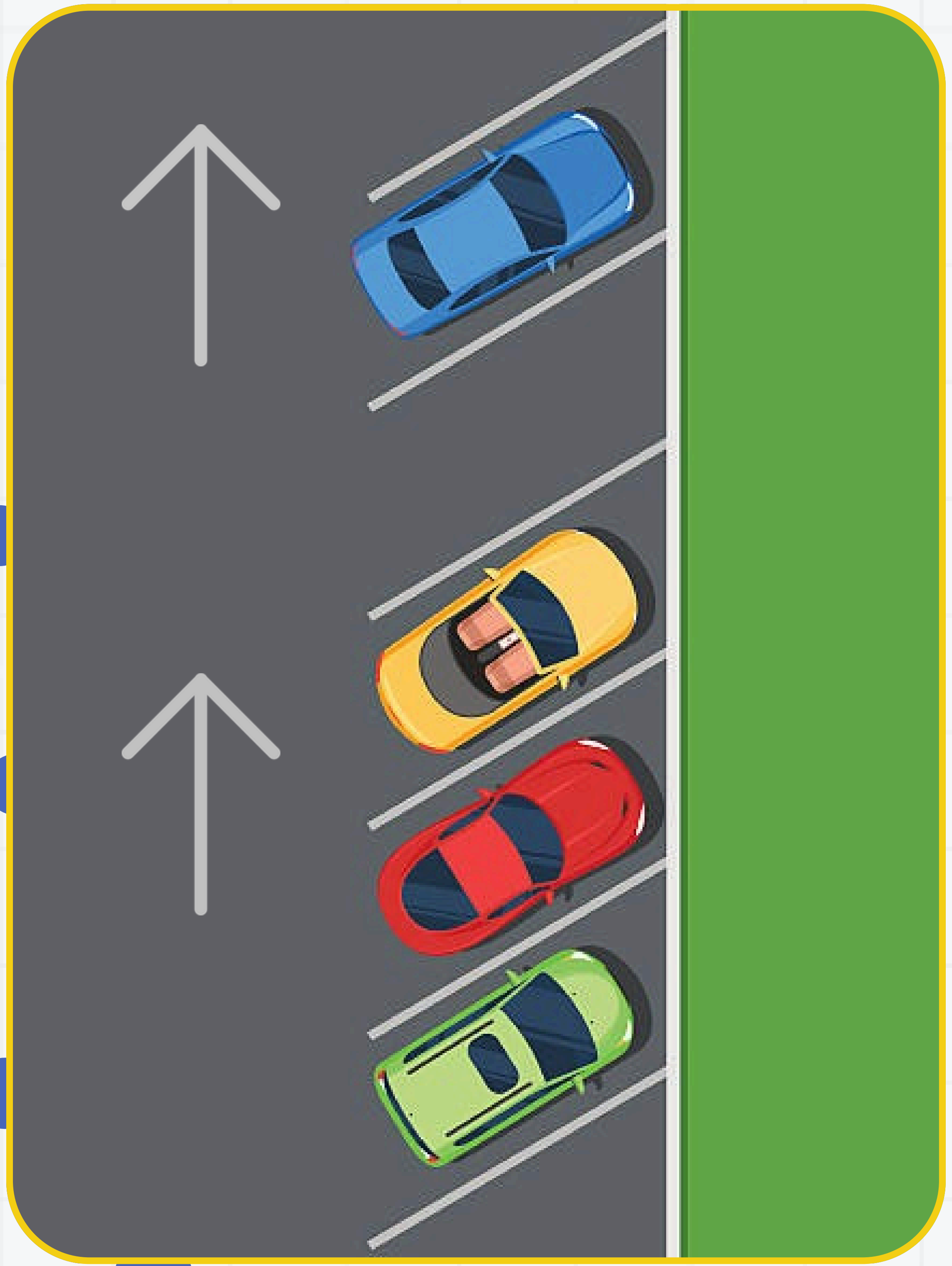
$$\frac{(7,1,2,1,1,5,7,5)}{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8}$$



Généralisation

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ une séquence d'entiers.
Les fonctions de parking de type λ sont les séquences $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ telles que leurs réarrangements croissants $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ respectent:

$$b_i \leqslant \lambda_{n-i+1} \text{ pour tout } i.$$

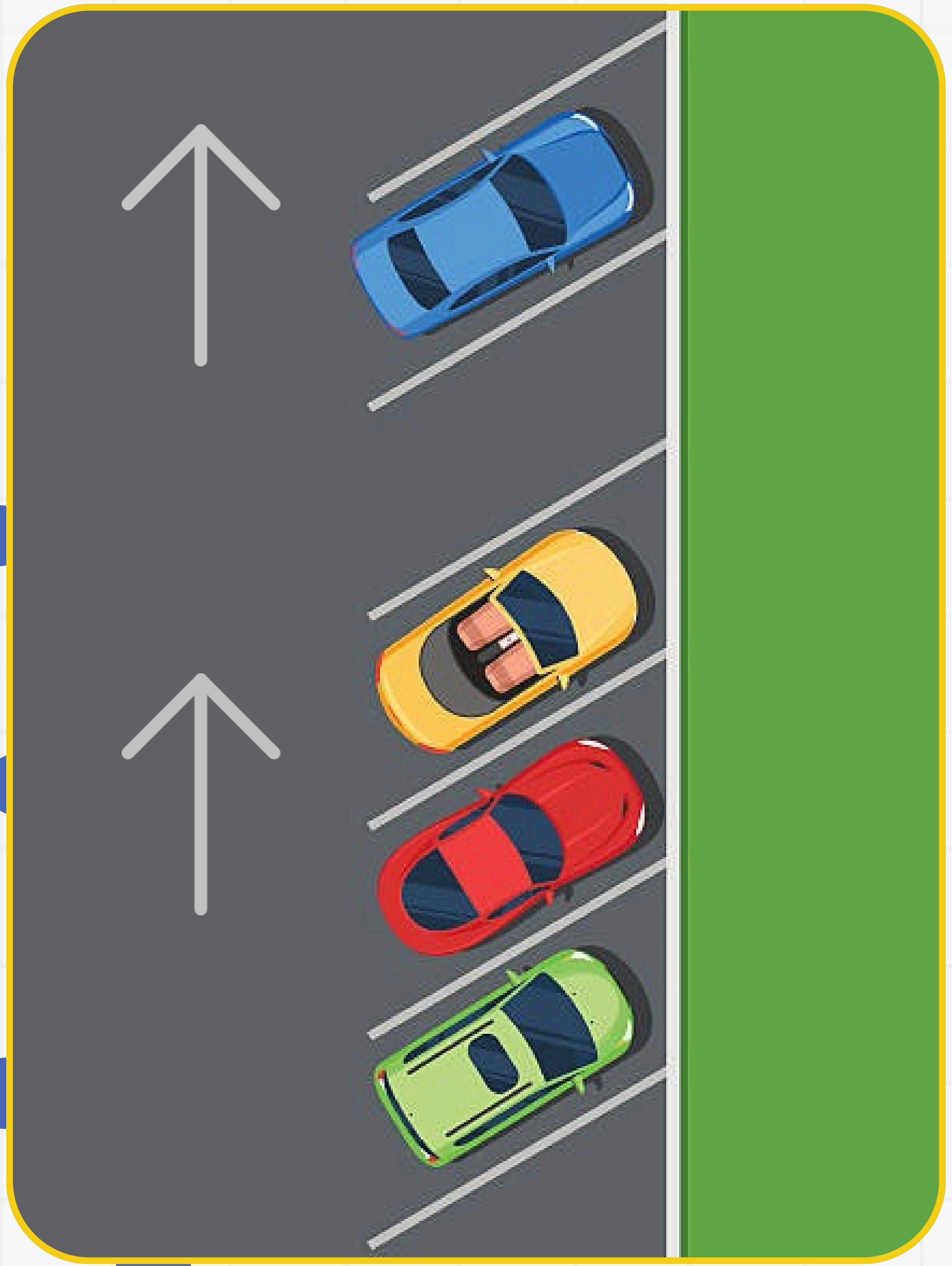


Généralisation

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ une séquence d'entiers.
Les fonctions de parking de type λ sont les séquences $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ telles que leurs réarrangements croissants $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ respectent:

$$b_i \leqslant \lambda_{n-i+1} \text{ pour tout } i.$$

Pour les fonctions de parking classiques:



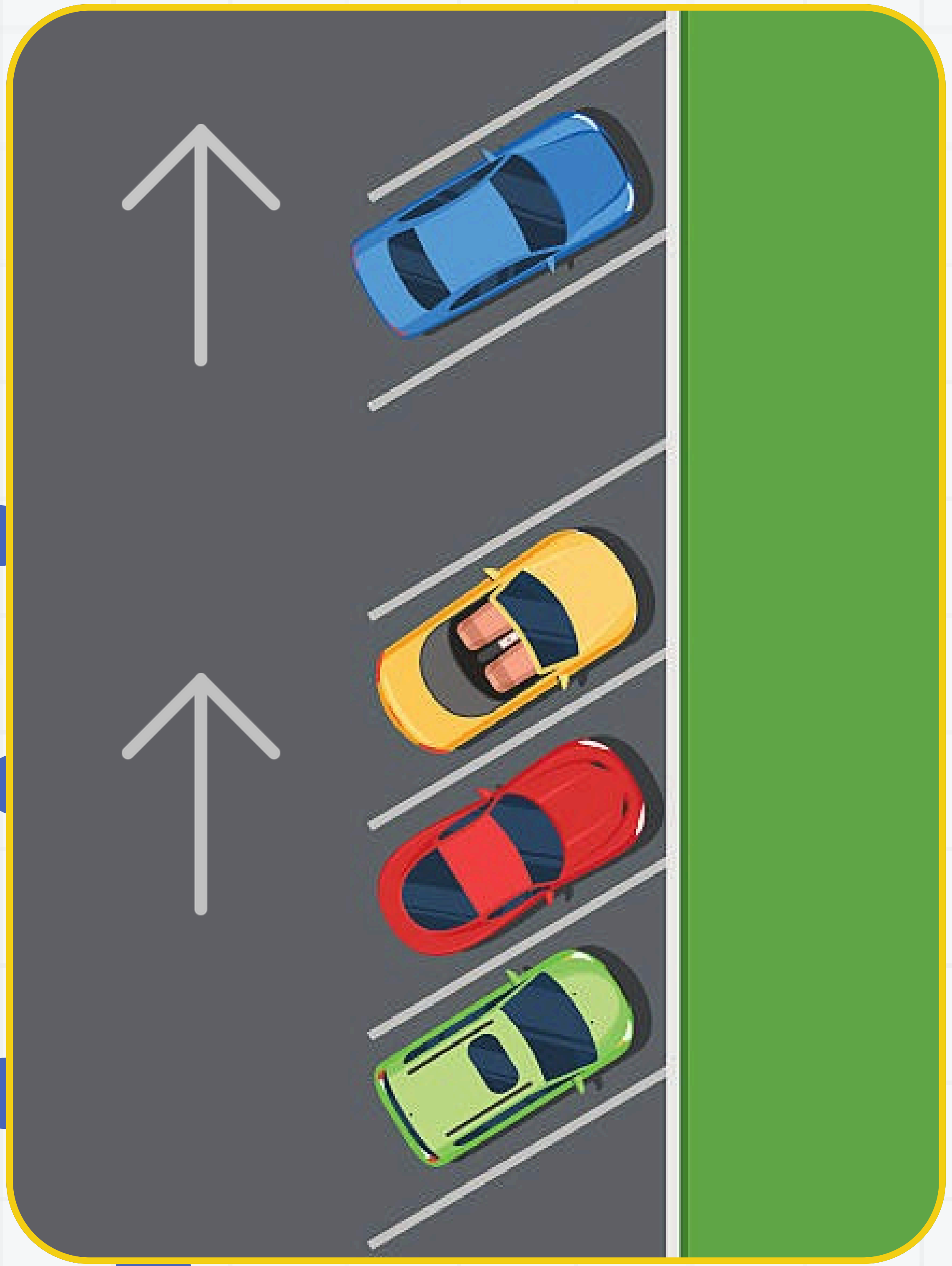
Généralisation

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ une séquence d'entiers.
Les fonctions de parking de type λ sont les séquences $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ telles que leurs réarrangements croissants $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ respectent:

$$b_i \leqslant \lambda_{n-i+1} \text{ pour tout } i.$$

Pour les fonctions de parking classiques:

$$\lambda = (n, n-1, \ldots, 1)$$



Généralisation

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ une séquence d'entiers.
Les fonctions de parking de type λ sont les séquences $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ telles que leurs réarrangements croissants $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ respectent:

$$b_i \leqslant \lambda_{n-i+1} \text{ pour tout } i.$$

$$N(\lambda) = n! \left(det[\frac{(\lambda_{n-i+1})^{j-i+1}}{(j-i+1)!}]_{i,j=1}^{n} \right)$$

Steck 1968, Gessel 1996

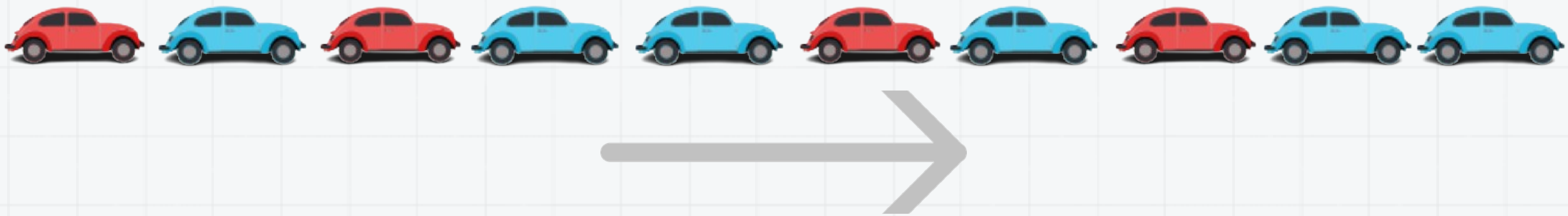
Variante

(p,q)-fonctions de parking

On considère une rue avec $n = p + q$ places.
Il y a p voitures rouges et q voitures bleues.
La voiture rouge i veut avoir au moins a_i voiture bleues garées avant elle.
La voiture bleue j veut avoir au moins b_j voitures rouges garées avant elle.
Le couple de séquence $(a_1, a_2, \ldots, a_p), (b_1, b_2, \ldots, b_q)$ est appelé $(p,q)-$ fonction de parking s'il existe une configuration qui respecte les préférences.

Variante

La (4,6)-séquence (0124, 011344) est une (4,6)-fonction de parking.



Variante

(p,q)-fonctions de parking

On considère une rue avec $n = p + q$ places.
Il y a p voitures rouges et q voitures bleues.
La voiture rouge i veut avoir au moins a_i voiture bleues garées avant elle.
La voiture bleue j veut avoir au moins b_j voitures rouges garées avant elle.
Le couple de séquence $(a_1, a_2, \dots, a_p), (b_1, b_2, \dots, b_q)$ est appelé $(p,q)-$ fonction de parking s'il existe une configuration qui respecte les préférences.

Le nombre de (p,q)-fonctions de parking est:

$$(p+q+1)(p+1)^{q-1}(q+1)^{p-1}$$

Le nombre de (p,q)-fonctions de parking croissantes est égal au **nombre de Narayana** $N(p+q+1, p+1)$.

Toujours plus

- G-fonctions de parking avec G un graphe.
- Lien avec de la géométrie algébrique (Shi arrangement).
- Questions probabilistes.
- Polynômes symétriques.
- Points fixes d'une fonction de parking ($a_i = i$) → papier sorti en 2024.
- Et bien plus...

Toujours plus

- G-fonctions de parking avec G un graphe.
- Lien avec de la géométrie algébrique (Shi arrangement).
- Questions probabilistes.
- Polynômes symétriques.
- Points fixes d'une fonction de parking $(a_i = i) \to$ papier sorti en 2024.
- Et bien plus...

Vous pouvez même créer vous-même vos propres questions!

Merci pour votre écoute.